

METODI MATEMATICI PER L'INFORMATICA

CANALE E-O A.A. 2009-10

Docente: C. Malvenuto

COMPITO DI ESAME – 5 LUGLIO 2010

Istruzioni.

- Completare subito la parte inferiore di questa pagina con il proprio nome, cognome e firma.
- Risolvere gli esercizi sui fogli protocollo forniti, indicando chiaramente il numero di ogni esercizio risolto. Riportare nome e cognome su ogni foglio.
- Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
- **Tutte le risposte vanno motivate.**
- **NON PARLARE** pena il ritiro immediato del compito.

ESERCIZIO	PUNTEGGIO
1	/20
2	/15
3	/20
4	/15
5	/20
6	/10
TOTALE	/100

Nome e Cognome ↓	Firma ↓

Esercizio 1. (20 punti) Si consideri la relazione R definita su \mathbb{N} da

$$mRn \text{ se e solo se } m \text{ è il doppio o la metà di } n.$$

Quali proprietà (riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva, totale) soddisfa la relazione R e quali non soddisfa? È una relazione di equivalenza? È una relazione d'ordine? Trovare un elemento $x \in \mathbb{N}$ per cui valga xRx .

Esercizio 2. (15 punti) Dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, vale l'uguaglianza

$$\sum_{k=1}^n (2k+1) = n(n+2).$$

Esercizio 3. (20 punti) Sia $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ la funzione che manda ogni numero naturale positivo nel suo più piccolo divisore primo. Per esempio, dato che $12 = 2^2 \cdot 3$, si ha $f(12) = 2$.

1. La funzione f è iniettiva? È suriettiva? È biiettiva?
2. Descrivere l'immagine di f .
3. Descrivere la controimmagine $f^{-1}(3)$ dell'elemento 3.

Esercizio 4. (15 punti) Usando un metodo a scelta determinare se l'enunciato $\neg A \vee \neg B$ è conseguenza logica dell'insieme di formule $\{A \rightarrow C, B \rightarrow D, \neg C \vee \neg D\}$.

Esercizio 5. (20 punti) Sia dato il linguaggio del calcolo dei predicati con gli usuali simboli per variabili e costanti e con il simbolo Si per designare un predicato binario. Si consideri l'interpretazione di questo linguaggio il cui dominio è l'insieme delle parti di \mathbb{N} , e in cui interpretiamo $\text{Si}(x, y)$ come "il sottoinsieme x è incluso nel sottoinsieme y ". Per esempio, interpretiamo la formula $\forall y \exists x \text{Si}(x, y)$ come "Dato comunque un sottoinsieme y di \mathbb{N} , c'è un sottoinsieme incluso in y ".

Formalizzare le seguenti frasi nel linguaggio del calcolo dei predicati.

1. Ogni sottoinsieme è incluso in sé stesso.
2. Esistono due sottoinsiemi nessuno dei quali include l'altro.
3. Dati tre sottoinsiemi x , y e z , se il primo include il secondo e il secondo include il terzo, allora il primo include il terzo.

Tradurre in linguaggio naturale le formule predicative che seguono, usando l'interpretazione descritta sopra, e dire se in questa interpretazione sono vere o no.

4. $\forall x \forall y (\text{Si}(x, y) \rightarrow \text{Si}(y, x))$
5. $\exists x \forall y \text{Si}(x, y)$

Esercizio 6. (10 punti)

1. Dire che cosa significa che due insiemi sono equipotenti.
2. Dire che cosa significa che un insieme è numerabile.