

METODI MATEMATICI PER L'INFORMATICA

CANALE E-O A.A. 2009-10

Docente: C. Malvenuto

COMPITO DI ESAME – 27 SETTEMBRE 2010

Istruzioni.

- Completare subito la parte inferiore di questa pagina con il proprio nome, cognome e firma.
- Scrivere solamente su questi fogli, anche dietro se occorre, a penna o a matita. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
- **Tutte le risposte vanno motivate.**
- **NON PARLARE** pena il ritiro immediato del compito.

ESERCIZIO	PUNTEGGIO
1	/15
2	/15
3	/15
4	/20
5	/15
6	/20
TOTALE	/100

Nome e Cognome ↓	Firma ↓

Esercizio 1. (15 punti) Si consideri l'insieme \mathbb{Z} dei numeri interi, e la relazione ρ su \mathbb{Z} così definita:

$$m \rho n \text{ se e solo se } m + n = 5.$$

Quali proprietà (riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva, totale) soddisfa la relazione ρ e quali non soddisfa? È una relazione di equivalenza? È una relazione d'ordine? Trovare, se esiste, un elemento $x \in \mathbb{Z}$ per cui valga $x \rho x$. Quanti sono gli elementi y per i quali vale $8 \rho y$?

Esercizio 2. (15 punti) Sia dato l'insieme $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e la famiglia di sottoinsiemi $X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}\}$; su X si consideri l'ordine parziale dato dall'inclusione insiemistica \subseteq .

1. Si disegni il diagramma di Hasse dell'insieme parzialmente ordinato (X, \subseteq) .
 2. Si determinino gli insiemi degli elementi minimali e massimali e, se esistono, il massimo e il minimo di (X, \subseteq) .
 3. Si scrivano una catena massimale e una catena non massimale di (X, \subseteq) .
-

Esercizio 3. (15 punti) Si considerino gli insiemi $A = \{x : x \in \mathbb{Q}, 0 \leq x \leq 100\}$, $B = \{x : x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 1\}$, $C = \{1 - 1/n : n \in \mathbb{N}\}$.

1. Gli insiemi A e B sono equipotenti?
 2. Gli insiemi A e C sono equipotenti?
 3. Gli insiemi B e C sono equipotenti?
-

Esercizio 4. (20 punti) Se (a_i) è la successione definita ricorsivamente da $a_1 = 5$, $a_2 = 11$, $a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$, dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha $a_n = 2^{n+1} + 3^{n-1}$.

Esercizio 5. (15 punti) Usando un metodo a scelta dimostrare che il seguente insieme di formule è soddisfacibile e darne un modello:

$$\{A \rightarrow C, B \leftrightarrow C, A \vee \neg B\}.$$

Esercizio 6. (20 punti) Sia dato il linguaggio del calcolo dei predicati con gli usuali simboli per variabili e costanti, con i simboli $=$ e D per designare due predicati binari.

Si consideri l'interpretazione di questo linguaggio il cui dominio è l'insieme \mathbb{Z} dei numeri interi, e in cui interpretiamo $=$ come l'usuale uguaglianza, e $D(m, n)$ come “ m è uguale al doppio di n ”. Per esempio, interpretiamo la formula $\exists b \forall a ((a = 6) \rightarrow D(a, b))$ come “esiste un numero b tale che, se un numero a è uguale a 6, a è il doppio di b ” (o più semplicemente “6 è il doppio di qualche numero”).

Formalizzare le seguenti frasi in questo linguaggio.

1. Ogni numero è la metà di un altro. [Come esprimiamo il concetto “metà” avendo a disposizione un predicato per “doppio di”?]
2. Esistono due numeri distinti nessuno dei quali sia il doppio dell'altro. [Attenzione a “distinti”!]
3. Non esiste un numero il cui doppio sia 5.

Tradurre in linguaggio naturale le formule predicative che seguono, usando l'interpretazione descritta sopra, e dire se in questa interpretazione sono vere o no.

4. $\forall x \forall y (D(x, y) \rightarrow D(y, x))$
 5. $\exists x D(x, x)$
-