METODI MATEMATICI PER L'INFORMATICA

Canale E–O a.a. 2009–10

Docente: C. Malvenuto

Compito di esame – 28 gennaio 2010
Parte seconda

Esercizio A. *(25 punti)* Si dimostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, che

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

Sia $P(n)$ l'uguaglianza $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.
(Passo base) Per $n = 1$ l'uguaglianza data, $P(1)$, diventa $2 \cdot 1 - 1 = 1^2$, cioè $1 = 1$.
(Ipotesi induttiva) Sia $n \geq 1$ tale che $P(n)$ è vera, cioè

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

(Passo induttivo) Mostriamo che $P(n+1)$ è vera:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + 2(n+1) - 1 \\
&= n^2 + 2(n+1) - 1 \\
&= n^2 + 2n + 1 \;=\; (n+1)^2.
\end{aligned}$$

Questo mostra che, per ogni $n \geq 1$, si ha $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
Per il principio di induzione segue che l'uguaglianza è vera per ogni $n \geq 1$.

Esercizio B. *(25 punti)* Usando un metodo a scelta determinare se l'enunciato $\neg p \vee \neg r$ è conseguenza logica dell'insieme di formule $\{p \to q, r \to s, \neg q \vee \neg s\}$.

Dire che una formula B è conseguenza logica di un dato insieme $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ di formule significa che non esiste nessuna interpretazione in cui tutte le formule A_i sono vere e la B è falsa. Ciò è equivalente a dire che la formula

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B$$

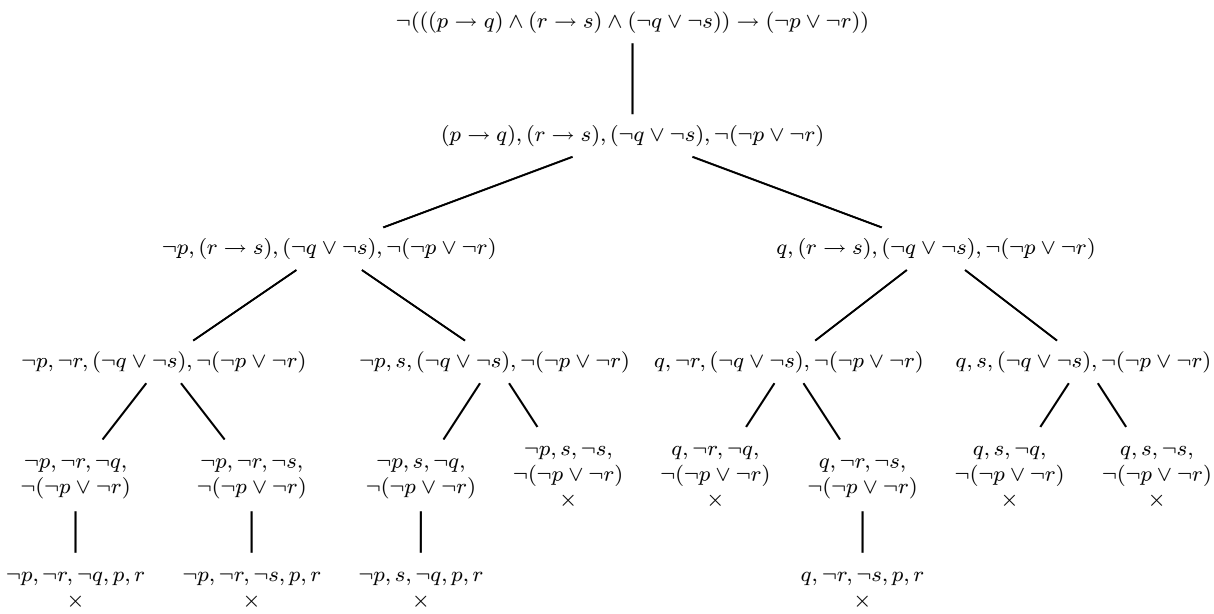
è valida.

Un modo per risolvere l'esercizio consiste quindi nel considerare la formula

$$\mathcal{F} = ((p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (\neg q \vee \neg s)) \to (\neg p \vee \neg r)$$

e verificare se è valida, per esempio con il metodo dei tableau o costruendone la tavola di verità.

Verifichiamolo con il metodo dei tableau. Ricordiamo che una formula è valida se e solo se la sua negata è insoddisfacibile. Quindi costruiamo il tableau relativo alla negazione di $\mathcal{F}$ e vediamo che è chiuso.



In certi casi, come in questo, può essere più rapido ragionare direttamente sulle formule. Mostriamo che, se sono vere tutte le formule $p \to q$, $r \to s$ e $\neg q \vee \neg s$, allora è vera necessariamente anche $\neg p \vee \neg r$. Esaminiamo quest'ultima formula. Si ha che $\neg p$ o è vera o non lo è. Se è vera, allora è vera tutta la formula e abbiamo concluso la dimostrazione. Consideriamo quindi il caso in cui $\neg p$ sia falsa e quindi p sia vera: vogliamo dedurre che da ciò segue che $\neg r$ è vera.

Se è vera p, avendo assunto che sia vera $p \to q$, ne segue che è vera anche q. Essendo vere q e $\neg q \vee \neg s$, deve essere vera $\neg s$. Infine, essendo vera $\neg s$ e $r \to s$ (che è equivalente a $\neg s \to \neg r$), è vera $\neg r$, come volevamo dimostrare.

Esercizio C. *(25 punti)* Dato il linguaggio del calcolo dei predicati con i simboli per predicati M e D e gli usuali simboli per variabili e costanti, se ne consideri l'interpretazione il cui dominio è l'insieme dei numeri naturali, e in cui interpretiamo $M(x, y)$ come "x è multiplo di y" e $D(x, y)$ come "x divide y". Per esempio, interpreteremo la formula $\forall x\ (D(10, x) \to M(x, 5))$ come "Se un numero è divisibile per 10, è un multiplo di 5".

Formalizzare le seguenti frasi nel linguaggio del calcolo dei predicati.

1. Esiste un numero divisibile per 3 e per 4.

2. Comunque si scelgano a, b e c, se a è multiplo di b e c è un divisore di b, allora a è anche multiplo di c.

Tradurre in linguaggio naturale le formule predicative che seguono, usando l'interpretazione descritta sopra, e dire se in questa interpretazione sono vere o no.

3. $\forall x\ \forall y\ \forall z\ (D(x, y) \to D(x, z))$

4. $M(7, 3) \vee D(4, 12)$

5. $\forall x\ \exists y\ M(y, x)$

1. $\exists x \ (D(3,x) \wedge D(4,x))$
2. $\forall a \ \forall b \ \forall c \ (M(a,b) \wedge D(c,b) \rightarrow M(a,c))$
3. Comunque si prendano tre numeri naturali, se il primo divide il secondo allora divide anche il terzo.

   Questa asserzione è falsa, come si vede per esempio scegliendo $a = 3$, $b = 6$, $c = 7$: in questo caso a divide b ma non c.
4. O 7 è multiplo di 3, o 4 divide 12.

   Questa asserzione è vera perché almeno una delle due affermazioni ("7 è multiplo di 3" oppure "4 divide 12") è vera, e cioè la seconda.
5. Comunque si prenda un numero naturale x, esiste un naturale y che è un suo multiplo. O, più sempicemente, ogni numero numero ammette un multiplo.

   Ovviamente in questa interpretazione si ottiene un'affermazione vera, per esempio perché ogni numero è multiplo di sé stesso.

Esercizio D. *(25 punti)* Usando il metodo dei tableau dire se la formula

$$((A \rightarrow B) \wedge C) \rightarrow ((A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C))$$

- è valida
- è insoddisfacibile
- è sia soddisfacibile che falsificabile

Se esistono interpretazioni che rendono vera la formula, descriverne una.

Ricordiamo che costruendo il tableau di una formula, se tutte le foglie trovate sono chiuse la formula è insoddisfacibile, mentre se ci sono foglie aperte la formula è soddisfacibile. Quindi, chiamando $\mathcal{F}$ la formula data, il tableau per $\mathcal{F}$ ci dirà se $\mathcal{F}$ è soddisfacibile o insoddisfacibile, mentre il tableau per $\neg\mathcal{F}$ ci dirà se $\neg\mathcal{F}$ è soddisfacibile (e quindi $\mathcal{F}$ è falsificabile) o insoddisfacibile (e quindi $\mathcal{F}$ è valida).

Riportiamo qui solo il tableau per $\neg\mathcal{F}$, da cui risulta che $\mathcal{F}$ è valida.

$$\neg[((A \to B) \wedge C) \to ((A \wedge C) \to (B \wedge C))]$$

$$(A \to B) \wedge C,\ \neg((A \wedge C) \to (B \wedge C))$$

$$A \to B,\ C,\ A \wedge C,\ \neg(B \wedge C)$$

$$\neg A,\ C,\ A \wedge C,\ \neg(B \wedge C) \qquad\qquad B,\ C,\ A \wedge C,\ \neg(B \wedge C)$$

$$\neg A,\ C,\ A,\ C,\ \neg(B \wedge C) \qquad\qquad B,\ C,\ A,\ \neg(B \wedge C)$$

$$\times$$

$$B,\ C,\ A,\ \neg B \qquad\qquad B,\ C,\ A,\ \neg C$$

$$\times \qquad\qquad \times$$