

## Homeworks per il corso di Teoria della Dimostrazione

### Esercizio 1

Dimostrare l'equivalenza tra refutazioni in Risoluzione regolare per una formula UNSAT  $F$  e read-once branching programs che risolvono il problema di ricerca della clausola falsa in  $F$ . Perché l'equivalenza non si estende anche tra Risoluzione e Branching programs ?

### Esercizio 2

Dimostrare che in ogni Prover Delayer game giocato sulla versione CNF UNSAT del PHP $[n+1,n]$ , il Delayer guadagna sempre almeno  $n$  punti.

### Esercizio 3

Si supponga di sapere che il Delayer vince sempre con  $p$  punti ogni PD game giocato su una formula CNF  $F$  UNSAT. Definire una 3-CNF sulla quale il Delayer vince sempre con  $\Omega(p)$  punti e dimostrarlo.

### Esercizio 4

Si prendano due esempi concreti di sistemi di Frege  $F_1$  e  $F_2$  definiti sullo stesso linguaggio. Dimostrare che  $F_1$  simula polinomialmente  $F_2$  e viceversa.

### Esercizio 5

Trovare dimostrazioni efficienti in Risoluzione treelike di  $\text{Peb}^0(G)$ , per ogni dag  $G$ .

### Esercizio 6

Dimostrare che Tree-like Resolution è quasipolinomialmente automatizzabile. Vale a dire: trovare un algoritmo (basato sul DPLL) che data in input una formula UNSAT  $F$ , restituisca una dimostrazione di  $F$  in TLR in tempo  $O(m^{\log m})$  dove  $m$  è la lunghezza della più piccola dimostrazione TLR di  $F$ .

### Esercizio 7

Sia  $F$  una formula in CNF. Sia  $G(F) = (U, V, E)$  il grafo bipartito così definito:

$U =$  clausole di  $F$ ;

$V =$  variabili di  $F$ ;

$(u, v) \in E$  sse nella clausola  $u$  compare  $v$  oppure  $\neg v$ .

Diremo che  $G(F)$  è un  $(r, c)$ -expander,  $c > 1$ , se per ogni  $U' \subseteq U$ , con  $|U'| \leq r$ , risulta  $|N(U')| \geq c|U'|$ , dove  $N(U)$  è l'insieme dei nodi vicini di  $U$  in  $G$ .

Denotiamo con  $e(F)$  il massimo  $r$  per il quale esiste un  $c > 1$  tale che  $G(F)$  è un  $(r, c)$ -expander.

Dimostrare che se  $F$  è formula in CNF UNSAT, allora in ogni Prover Delayer Game giocato su  $F$ , il Delayer vince almeno  $\Omega(e(F))$  dollari.