III

Logica degli enunciati

10. ENUNCIATI, CONNETTIVI, VALORI DI VERITÀ

10.1. Verità

> "I matematici sono stati sempre persuasi di dimostrare delle *verità* o delle *proposizioni vere*. Evidentemente tale convinzione non può essere che di ordine sentimentale o metafisico: non si può certo giustificarla ponendosi sul terreno della matematica".
>
> Nicolas Bourbaki

La frase di Bourbaki che abbiamo scelto per introdurre la prima sezione dedicata alla logica potrà stupire il lettore: la logica appare infatti strettamente collegata alla nozione di verità e la posizione espressa dal grande matematico policefalo può apparire eccessivamente prudente.

Ricordando le radici del pensiero matematico e logico, Anna Labella scrive:

> "Se andiamo a rileggere le dimostrazioni della geometria greca per considerarle non rispetto alla loro impostazione tecnica, ma per il ruolo che hanno nei confronti della tesi cui arrivano, ci troviamo sostanzialmente di fronte a tre situazioni principali che la dicono lunga sul ruolo assegnato alla dimostrazione: dimostrazioni di qualcosa che è vero, ma sconosciuto e non immediato (…); dimostrazioni di qualcosa che è evidente, ad esempio che gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali; dimostrazioni di qualcosa che è contro l'intuizione" (Ben-Ari, 1998, p. x).

Dunque le dimostrazioni possono riguardare fatti più o meno evidenti o plausibili, ma riguardano comunque fatti *veri*. La logica di cui ci occupiamo è *bivalente*, cioè prevede che le espressioni assumano uno ed uno solo dei due valori di verità "vero", V, o "falso", F. Intuitivamente, con l'attribuzione di uno di questi due valori si indica che la verità (o la falsità) dell'espressione in questione può essere stabilita senza dubbio, che è evidente e oggettiva.

La logica contemporanea ha però evidenziato che il concetto di verità è delicato. Per introdurre la questione, proponiamo alcuni brani tratti da *Verità e dimostrazione* di Alfred Tarski (Tarski, 1969; riprenderemo alcune considerazioni da: Bagni, 1997) in cui si osserva che l'interpretazione di tale concetto ha radici antiche e può basarsi su considerazioni filosofiche come quelle espresse nel seguente passo, tratto dalla *Metafisica* di Aristotele:

"Dire di ciò che è che non è, o di ciò che non è che è, è falso, mentre dire di ciò che è che è o di ciò che non è che non è, è vero" (Tarski, 1969).

Se considerassimo queste affermazioni alla stregua di una "definizione", dovremmo osservare che la formulazione sarebbe insufficiente dal punto di vista formale: non è infatti abbastanza generale, in quanto è riferita soltanto a proposizioni che affermano qualche cosa ("che è" o "che non è") di un soggetto, ed sarebbe talvolta difficile far rientrare una proposizione qualsiasi in questo schema senza modificarne il senso.

Nell'articolo citato l'Autore si propone di ottenere una soddisfacente spiegazione del concetto classico di verità, superando l'originale formulazione aristotelica ma conservando di essa gli intenti principali. Per fare ciò è innanzitutto indispensabile riferirsi ad un linguaggio: considereremo la lingua italiana.

Seguiamo ancora Tarski ed esaminiamo la proposizione:

«La neve è bianca»

Che cosa intendiamo dire quando affermiamo che essa è vera o che è falsa? Accettando l'impostazione di Aristotele potremmo scrivere (Tarski, 1969):

«La neve è bianca» è vera se e solo se la neve è bianca
«La neve è bianca» è falsa se e solo se la neve non è bianca

Queste frasi illustrano il significato dei termini «vero» e «falso» quando tali termini sono riferiti alla proposizione «la neve è bianca» e possono dunque essere considerate definizioni (parziali) dei termini «vero» e «falso», cioè definizioni di questi termini in relazione a una particolare proposizione: «La neve è bianca». Generalizziamo allora quanto affermato per quella singola proposizione; otteniamo (sempre seguendo: Tarski, 1969):

(1) «*p*» è vera se e solo se *p*

Nella proposizione che verrà sostituita a *p*, però, non dovrà comparire la parola «vero», altrimenti la (1) verrebbe a costituire, ovviamente, un circolo vizioso e non sarebbe accettabile come definizione (parziale) di verità.

Quando avremo precisato un'equivalenza della forma (1) nella quale «*p*» sia sostituita da un'arbitraria proposizione italiana potremo dire che l'uso del termine «vero» in riferimento alle proposizioni italiane è conforme al concetto classico di verità. Potremo allora affermare, nelle parole di Tarski, che "l'uso del termine «vero» è adeguato" (Tarski, 1969).

Ma è possibile realizzare tutto ciò? È cioè possibile fissare un uso adeguato del termine «vero» per le proposizioni scritte nel linguaggio scelto (nella lingua italiana)?

A questo punto è necessario precisare l'ambito nel quale vogliamo definire il concetto di verità: il procedimento sopra descritto non sarebbe ad esempio applicabile considerando l'intera lingua italiana. Innanzitutto l'insieme delle proposizioni italiane è (potenzialmente) infinito; inoltre la parola «vero» compare nella lingua italiana e ciò impedisce di applicare il procedimento.

Ma si presentano anche altri e ben più gravi problemi: se immaginassimo la possibilità di determinare un uso adeguato del termine «vero» con riferimento a proposizioni italiane del tutto arbitrarie, cadremmo inevitabilmente in una contraddizione: ci ritroveremmo infatti di fronte alla preoccupante possibilità di incontrare l'antinomia del mentitore (della quale ci siamo occupati a lungo nella sezione I). Seguiamo l'esposizione di Tarski:

> "Il linguaggio comune è universale, né deve essere altrimenti, giacché ci si aspetta che esso fornisca i mezzi adeguati a esprimere ogni cosa che possa essere espressa (…) Possiamo perfino costruire nel linguaggio ciò che talvolta viene detta una proposizione autologa, cioè una proposizione *S* che esprime il fatto che *S* stessa è vera o che è falsa. Se *S* esprime la propria falsità, si può dimostrare con un semplice ragionamento che *S* è contemporaneamente vera e falsa, e così ci ritroviamo di fronte l'antinomia" (Tarski, 1969).

Un grave problema è dunque determinato dalla potenza del linguaggio in cui scegliamo di operare; ma linguaggi universali non sono, in generale, assolutamente necessari per gli scopi della ricerca scientifica. È allora possibile dare una definizione del concetto di verità per linguaggi semanticamente limitati?

Tarski risponde affermativamente, ma precisa alcune condizioni: è necessario che il vocabolario del linguaggio in questione sia completamente determinato e che siano formulate esplicitamente delle precise regole sintattiche sulle quali basare la formazione delle proposizioni. Tali regole devono essere formali, dunque riferite esclusivamente alla forma esteriore delle espressioni. I linguaggi che soddisfano a queste condizioni sono detti formalizzati.

Si noti inoltre che il linguaggio che è l'oggetto dello studio (per il quale dunque si vuole costruire la definizione di verità) non coincide con il linguaggio nel quale la definizione viene formulata; quest'ultimo si dice *metalinguaggio*, mentre il primo è denominato *linguaggio oggetto*. Il metalinguaggio deve contenere come parte propria il linguaggio oggetto; deve inoltre contenere nomi per le espressioni del linguaggio oggetto e altri termini necessari allo studio del linguaggio oggetto. Sottolineiamo che nel procedimento di definizione del concetto di verità i termini semantici (ovvero quelli che collegano le proposizioni del linguaggio oggetto e gli oggetti a cui esse sono riferite) devono poter essere introdotti nel metalinguaggio mediante opportune definizioni. Tutto ciò conferma che il metalinguaggio deve essere più ricco del corrispondente linguaggio oggetto.

Considerate queste precisazioni è possibile concludere:

> "Se tutte le precedenti condizioni sono soddisfatte, la costruzione della desiderata definizione di verità non presenta difficoltà essenziali. Tecnicamente, tuttavia, essa è troppo complicata per essere esposta qui in dettaglio. Per ogni data proposizione del linguaggio oggetto si può facilmente formulare la corrispondente definizione parziale della forma (1)" (Tarski, 1969).

Si presenta infine un'ulteriore difficoltà: l'insieme co stituito da tutte le proposizioni del linguaggio oggetto è infinito, mentre ogni proposizione del metalinguaggio è una sequenza finita di segni; pertanto non si può pensare di dare la desiderata definizione generale mediante un puro e semplice accostamento di tutte le (infinite) definizioni parziali. Eppure, conclude Tarski nel lavoro citato, la nostra definizione generale non è poi molto diversa, almeno intuitivamente, da quell'accostamento:

> "Molto approssimativamente, si procede come segue. Dapprima si considerano le proposizioni più semplici, che non contengono altre proposizioni come parti; per queste proposizioni si trova il modo di definire la verità direttamente (usando la stessa idea che conduce alle definizioni parziali). Poi, mediante l'uso delle regole sintattiche che riguardano la formazione di proposizioni più complicate a partire da quelle più semplici, si estende la definizione a proposizioni composte arbitrarie; si applica qui il metodo conosciuto in matematica come definizione per recursione".

10.2. Enunciati

Il paragrafo precedente mostra che il concetto di verità (o di falsità) di un'affermazione è certamente delicato e complesso. Un'impostazione rigorosa della logica matematica potrebbe allora concentrarsi innanzitutto sulle espressioni che possono essere scritte utilizzando (sintatticamente) un assegnato alfabeto e solo successivamente occuparsi della semantica di tali espressioni, ovvero dell'attribuzione di un significato e dei conseguenti valori di verità ad esse. Dunque anche l'introduzione del concetto di enunciato, che come vedremo è strettamente collegata all'attribuzione dei valori di verità ad un'espressione, potrebbe essere rimandata (torneremo infatti sul concetto di enunciato nella sezione seguente, seguendo un percorso analogo a quello ora delineato, seppure in un ambito più ampio).

Tuttavia, didatticamente, è utile anticipare sin d'ora che diremo *enunciato* o *proposizione* un'affermazione che assume uno ed un solo valore di verità, vero oppure falso. E tale caratteristica è tutt'altro che banale: infatti non tutte le affermazioni assumono incontestabilmente uno ed un solo valore di verità.

(Contro)esempio. L'affermazione:

Esiste almeno un numero reale tale che il suo quadrato sia il reale z

non è un enunciato: esso dipende dal particolare z che sarà considerato; la scelta di un valore z negativo o non negativo comporta un valore di verità rispettivamente falso o vero per l'affermazione data.

E l'affermazione:

Tutti i naturali pari maggiori di 2 sono somme di due numeri primi

può essere considerato un vero e proprio enunciato? Si tratta infatti della celebre *congettura di Goldbach*, un problema che abbiamo presentato nella sezione precedente; com'è noto, nessun matematico, sino ad oggi (2002), è stato in grado di dimostrare (oppure smentire) tale famosa affermazione. In altri termini, non sappiamo se la frase sopra riportata sia vera o sia falsa; a rigore, non potremmo neppure essere sicuri che sia possibile stabilire la sua verità o la sua falsità!

Alcuni enunciati sono costituiti da una sola affermazione (come «La neve è bianca» citato da Tarski) e sono detti *enunciati atomici*. Sottolineiamo sin d'ora che in questo primo capitolo dedicato alla logica degli enunciati prescinderemo dalla "struttura interna" degli enunciati in questione: in effetti sarebbe importante esaminare il tipo di affermazione di volta in volta considerata, che spesso viene riferita ad un soggetto *variabile* (cioè essa può essere riferita ad un singolo soggetto ma anche ad un insieme di soggetti). Questa nostra scelta è esclusivamente didattica e provvisoria: verrà superata quando passeremo alla considerazione della logica dei predicati.

Pur senza esaminare, in questa fase, la struttura degli enunciati, gli enunciati atomici non saranno gli unici che prenderemo in considerazione. Enunciati più complicati sono costituiti da più affermazioni, collegate da opportune parole (*connettivi*) come o, *e*, *se… allora…, se e solo se*. I connettivi collegano gli enunciati senza riguardo al significato che possono assumere quelli: l'unica caratteristica che viene indicata nella loro definizione è quale valore di verità abbia l'enunciato composto a partire soltanto dai valori di verità assegnati agli enunciati componenti.

(Contro)esempio. Intuitivamente:

A = "il numero otto è rappresentato ad una sola cifra"
B = "un triangolo ha tre lati"

sono enunciati veri; però il buon senso ci porterebbe a dire che:

"è inevitabile che A"

è falso (possiamo infatti rappresentare otto in base 2, ottenendo 100); invece:

"è inevitabile che B"

è vero. Da ciò potremmo concludere che l'operatore 'è inevitabile che" non agisce sugli enunciati come fanno i veri e propri "connettivi" logici, dunque tenendo conto esclusivamente dei valori di verità.

Come vedremo nel paragrafo seguente, la definizione dei connettivi avviene mediante le *tavole di verità*.

10.3. Connettivi e valori di verità

I connettivi formalizzano alcune parole e sono indicati da opportuni simboli:

$\neg A$	che formalizza	non A
$A \wedge B$	che formalizza	A e B
$A \vee B$	che formalizza	A o B
$A \rightarrow B$	che formalizza	se A allora B
$A \leftrightarrow B$	che formalizza	se A allora B e se B allora A

(talvolta "non" viene indicato come "operatore" e non come "connettivo" in quanto, a differenza degli altri connettivi, non collega due enunciati ma opera su di un solo enunciato).

(Contro)esempio. Non sarà inutile osservare che l'indicazione dei connettivi mediante congiunzioni come "non", "e", "o" richiede una qualche prudenza. Ad esempio, la scrittura $A \vee B$, che come sopra detto formalizza "A o B", deve essere intesa in senso inclusivo ("o A o B o entrambi"), non in senso esclusivo ("o A o B ma *non* entrambi").

Un'effettiva definizione dei connettivi richiede la precisazione delle tavole di verità, di cui ci occuperemo nel seguito del paragrafo.

Grazie ai connettivi è possibile introdurre per induzione strutturale l'insieme degli enunciati: utilizzeremo un alfabeto costituito da lettere maiuscole (con le quali rappresenteremo gli enunciati atomici, dai connettivi sopra introdotti e da un insieme finito di segni come virgole o parentesi.

Possiamo allora procedere per induzione ed affermare che:

- A, B, C, … sono enunciati
- se X, Y sono enunciati, allora $\neg X$, $X \wedge Y$, $X \vee Y$, $X \rightarrow Y$, $X \leftrightarrow Y$ sono enunciati

Nella tabella (tavola di verità) sono riassunte le definizioni dei connettivi:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Costruiremo le tavole di verità di alcuni enunciati composti (il metodo della costruzione della tavola di verità è stato introdotto da Ludwig Wittgentein).

Esempio. Tavola di verità dell'enunciato composto: $\neg[(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)]$:

A	B	$A \wedge B$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$	$\neg[(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)]$
V	V	V	F	F	V	F
V	F	F	V	V	V	F
F	V	F	F	F	F	V
F	F	F	V	F	F	V

I valori di verità di $\neg[(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)]$ corrispondono a quelli di $\neg A$.

Esempio. Tavola di verità dell'enunciato composto: $(A \to B)\leftrightarrow(\neg B\to\neg A)$:

A	B	$A\to B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B\to\neg A$	$(A\to B)\leftrightarrow(\neg B\to\neg A)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Il valore di verità è V per ogni scelta dei valori di verità di A e di B.

Prima di procedere osserveremo che l'introduzione di cinque connettivi è sovrabbondante: ad esempio, sarebbe stato molto più sintetico introdurre solamente "$\neg$" (non) e "$\to$" (se… allora). Avremmo allora ricondotto gli altri connettivi a combinazioni di questi; si verifica infatti che:

$A\wedge B$	ha la stessa tavola di verità di	$\neg[A\to(\neg B)]$
$A\vee B$	ha la stessa tavola di verità di	$(\neg A)\to B$
$A\leftrightarrow B$	ha la stessa tavola di verità di	$\neg\{(A\to B)\to[\neg(B\to A)]\}$

Lasciamo al lettore la costruzione delle tavole di verità degli enunciati composti presenti nella colonna a destra.

Esempio. Non è difficile verificare (ed il lettore lo farà facilmente) che gli enunciati composti $\neg(A\vee B)$ e $(\neg A)\wedge(\neg B)$ hanno gli stessi valori di verità. Questa osservazione (legge di De Morgan) ha delle conseguenze interessanti: in particolare, riflettendo su di essa possiamo renderci conto che il corretto uso della simbologia comunemente usata in matematica presuppone un'effettiva conoscenza delle relazioni tra i connettivi logici.

Consideriamo ad esempio l'equazione:

$$x^2 = 1$$

Le sue soluzioni si trovano spesso espresse compattamente nella forma:

$$x = \pm 1$$

intendendo con ciò che la x può assumere sia il valore +1 che il valore –1. Dunque, utilizzando i connettivi logici, la precedente scrittura può essere espressa, più correttamente, dalla:

$$x = 1 \ \vee \ x = -1$$

Consideriamo ora la scrittura:

$$x^2 \neq 1 \qquad \text{che porta alla} \qquad x \neq \pm 1$$

In questo caso, al simbolo "±" non è direttamente legato un connettivo "$\vee$"; ovvero, la precedente scrittura non deve essere tradotta nella:

$$x \neq 1 \ \vee \ x \neq -1$$

in quanto questa richiederebbe il verificarsi di *almeno una* delle condizioni $x \neq 1$, $x \neq -1$ (quindi alla x potrebbe essere sostituito… un qualsiasi numero reale!), mentre $x \neq \pm 1$ richiede il *contemporaneo* verificarsi di entrambe tali condizioni.

Ricordiamo piuttosto che $x^2 \neq 1$ deve essere interpretata come la negazione di $x^2 = 1$; dunque essa corrisponde a:

$$\neg(x^2 = 1) \quad \text{cioè} \quad \neg(x = 1 \ \vee \ x = -1) \quad \text{e infine} \quad \neg(x = 1) \ \wedge \ \neg(x = -1)$$

10.4. Interpretazioni, equivalenza logica, validità

Diremo *interpretazione* di un enunciato composto una funzione che assegna uno dei due valori di verità V o F a ciascun enunciato atomico componente e che quindi assegna un valore di verità all'enunciato composto sulla base delle tavole di verità.

Definizione. Due enunciati si dicono *logicamente equivalenti* se hanno lo stesso valore di verità per ogni interpretazione.

Esempio. Le seguenti sono equivalenze logiche:

A equivale a ¬¬A
A equivale a A∧A
A equivale a A∨A

A∧B equivale a B∧A

$A \lor B$ equivale a $B \lor A$
$A \leftrightarrow B$ equivale a $B \leftrightarrow A$
$A \to B$ equivale a $(\neg B) \to (\neg A)$

$A \land (B \land C)$ equivale a $(A \land B) \land C$
$A \lor (B \lor C)$ equivale a $(A \lor B) \lor C$
$A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$ equivale a $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$

$A \land (B \lor C)$ equivale a $(A \land B) \lor (A \land C)$
$A \lor (B \land C)$ equivale a $(A \lor B) \land (A \lor C)$
$A \land (A \lor B)$ equivale a A
$A \lor (A \land B)$ equivale a A

$A \leftrightarrow B$ equivale a $(A \to B) \land (B \to A)$
$A \to B$ equivale a $(\neg A) \lor B$
$A \to B$ equivale a $\neg [A \land (\neg B)]$
$A \land B$ equivale a $\neg [(\neg A) \lor (\neg B)]$ (legge di De Morgan)
$A \lor B$ equivale a $\neg [(\neg A) \land (\neg B)]$ (legge di De Morgan)
$A \land B$ equivale a $\neg [A \to (\neg B)]$
$A \lor B$ equivale a $(\neg A) \to B$

$A \to B$ equivale a $A \leftrightarrow (A \land B)$
$A \to B$ equivale a $B \leftrightarrow (A \lor B)$
$A \land B$ equivale a $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \lor B)$
$A \leftrightarrow B$ equivale a $(A \lor B) \to (A \land B)$

Definizione. Un enunciato si dice *soddisfacibile* se assume il valore di verità V per almeno un'interpretazione; in tale caso, questa interpretazione si dice *modello* per l'enunciato considerato.

Definizione. Un enunciato P che assume il valore di verità V per ogni interpretazione si dice enunciato *valido* o *tautologia*.

L'enunciato $(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$, di cui abbiamo costruito la tavola di verità in un precedente esempio, è una tautologia.

Se P è un enunciato valido (tautologia), si scrive:

$$\models P$$

Definizione. Un enunciato si dice *insoddisfacibile* se non assume il valore di verità V per alcuna interpretazione, cioè se in ogni interpretazione assume il valore di verità F. Un enunciato è *falsificabile* se assume il favore di verità F in almeno un'interpretazione.

Dalle definizioni introdotte segue che un enunciato P è valido (è una tautologia) se e solo se ¬P è insoddisfacibile e che P è soddisfacibile se e solo se ¬P è falsificabile (invitiamo il lettore, per esercizio, a giustificare le precedenti affermazioni).

11. IL METODO DEI TABLEAUX PROPOSIZIONALI

11.1. La confutazione di un enunciato composto

Il metodo dei tableaux proposizionali è un procedimento per confutare un enunciato composto. Esso può risultare più efficiente, dal punto di vista esecutivo, del metodo delle tavole di verità.

Confutare un enunciato, cioè provare che esso è insoddisfacibile, significa dimostrare che esso è falso qualsiasi siano i valori di verità degli enunciati componenti. Ad esempio, confutare $A\wedge(\neg A)$ è immediato, in quanto tale enunciato risulta sempre falso, sia che l'(unico) componente A sia vero, sia che A sia falso.

Ovviamente il metodo dei tableaux può essere utilizzato anche per provare che un enunciato composto è una tautologia: ricordando quanto osservato alla fine del paragrafo precedente, basta confutare la negazione dell'enunciato in esame. Confutare ¬A (provare che ¬A è sempre falso) equivale a dimostrare che A è una tautologia (che A è sempre vero). Osserviamo invece che non possiamo servirci del metodo dei tableaux per esaminare i singoli valori di verità assunti da enunciati composti (suscettibili di assumere entrambi i valori di verità), al variare dei valori di verità assunti dagli enunciati componenti: per condurre un simile esame, non possiamo che affidarci al metodo (spesso più complicato) delle tavole di verità.

I tableaux proposizionali sono grafi ad albero costituiti da una disposizione piana di nodi, contenenti uno o più enunciati; il primo contiene sempre l'enunciato in esame. A partire da questo viene costruita una tabella ramificata, costituita da enunciati sempre meno complicati, spesso fino a giungere ai singoli enunciati componenti: la costruzione ha termine quando tutti gli ultimi nodi dei rami contengono solamente enunciati atomici. Ad un ramo possono essere aggiunti nodi in base ad alcune regole, che presenteremo intuitivamente (riprenderemo in termini più precisi queste considerazioni informali nella dimostrazione del teorema con il quale chiuderemo questa sezione).

Procederemo nel modo seguente: sappiamo che l'enunciato $A\wedge(\neg A)$ è sempre falso; per rappresentare tale enunciato in un tableau, collocheremo i suoi enunciati componenti (A e $\neg A$) in uno stesso nodo; la presenza nello stesso nodo di un enunciato e della sua negazione formalizza dunque un'inevitabile situazione di falsità. Quindi la contemporanea presenza di A e $\neg A$ in uno stesso nodo rende inutile procedere nell'analisi e il ramo al quale il nodo appartiene viene detto *chiuso*.

Consideriamo ora in generale i connettivi $\wedge$, $\vee$ e riflettiamo: in quale caso possiamo dire che $X\wedge Y$ è falso? Basta che (almeno) uno degli enunciati X e Y sia falso. Ma in quale caso, invece, possiamo dire che $X\vee Y$ è falso? Se e solo se X è falso e contemporaneamente anche Y è falso.

Dunque se nel caso di $X\wedge Y$, analogamente a quanto sopra visto, possiamo collocare gli enunciati componenti X, Y nello stesso nodo, nel caso di $X\vee Y$ dobbiamo creare una biforcazione del grafo: infatti non è sufficiente che sia falso uno solo tra X e Y per determinare la falsità di $X\vee Y$, ma è necessario che siano falsi entrambi. Anticipiamo che le regole che si riferiranno al connettivo $\wedge$ determineranno l'aggiunta di un (singolo) nodo al tableau e saranno dette α-regole; le regole che si riferiranno a $\vee$ determineranno la biforcazione del tableau e dunque l'aggiunta di due nodi: saranno dette β-regole.

Tali regole dovranno essere operativamente interpretate nel modo seguente: se tra gli enunciati di un nodo c'è quello presente nella prima riga della regola allora al ramo in questione si può aggiungere un nodo (o una coppia di nodi, nel caso delle biforcazioni previste) in cui l'enunciato sia sostituito come indicato nell'ultima riga della regola; per il resto del nodo, si procede alla sua *ricopiatura*.

Ricapitolando: la presenza di un enunciato nel ramo in esame (l'enunciato scritto nella prima riga) ci consente di aggiungere al ramo stesso:

- o *un unico nodo*, con uno o con due enunciati, la falsità di uno dei quali comporta la falsità dell'enunciato di partenza (regole di tipo α);
- o *due nodi* (quindi con una biforcazione), la falsità di entrambi i quali comporta la falsità dell'enunciato di partenza (regole di tipo β).

Pertanto, se all'ultimo nodo di un ramo appartengono contemporaneamente un enunciato A e la sua negazione $\neg A$, significa che sia la falsità di A che la verità di A (quindi: la falsità di $\neg A$) comportano la falsità dell'enunciato del primo nodo cioè dell'enunciato da confutare. Si dice allora che il ramo è *chiuso*; quando *tutti* i rami sono chiusi, il tableau è chiuso e la confutazione è completata.

11.2. La costruzione di un tableau proposizionale

Ricaviamo dunque le regole per la costruzione di un tableau proposizionale (la numerazione delle regole è quella proposta in: Bell & Machover, 1977), iniziando con l'evidenziare la corrispondenza dei connettivi coinvolti al connettivo $\wedge$ (ciò porterà a delle α-regole) o al connettivo $\vee$ (ciò porterà a delle β-regole):

Prima regola	(α)	riguarda: $\neg(\neg X)$	cioè: X
Seconda regola	(β)	riguarda: $(X\to Y)$	cioè: $(\neg X)\vee Y$
Terza regola	(α)	riguarda: $\neg(X\to Y)$	cioè: $X\wedge(\neg Y)$
Quarta regola	(α)	riguarda: $X\wedge Y$	
Quinta regola	(β)	riguarda: $\neg(X\wedge Y)$	cioè: $(\neg X)\vee(\neg Y)$
Sesta regola	(β)	riguarda: $X\vee Y$	
Settima regola	(α)	riguarda: $\neg(X\vee Y)$	cioè: $(\neg X)\wedge(\neg Y)$
Ottava regola	(β)	riguarda: $X\leftrightarrow Y$	cioè: $(X\wedge Y)\vee[(\neg X)\wedge(\neg Y)]$
Nona regola	(β)	riguarda: $\neg(X\leftrightarrow Y)$	cioè: $[X\wedge(\neg Y)]\vee[(\neg X)\wedge Y]$

Prima regola (α)

$$\begin{array}{c} \neg(\neg X) \\ \downarrow \\ | \\ X \end{array}$$

Seconda regola (β)

$$\begin{array}{c} X\to Y \\ \downarrow \\ \begin{array}{cc} | & | \\ \neg X & Y \end{array} \end{array}$$

Terza regola (α)

$$\begin{array}{c} \neg(X\to Y) \\ \downarrow \\ | \\ X \\ \neg Y \end{array}$$

Quarta regola (α)

$$\begin{array}{c} X\wedge Y \\ \downarrow \\ | \\ X \\ Y \end{array}$$

Quinta regola (β)

$$\begin{array}{c} \neg(X\wedge Y) \\ \downarrow \\ \begin{array}{cc} | & | \\ \neg X & \neg Y \end{array} \end{array}$$

Sesta regola (β)

$$\begin{array}{c} X\vee Y \\ \downarrow \\ \begin{array}{cc} | & | \\ X & Y \end{array} \end{array}$$

Settima regola (α)

$$\begin{array}{c} \neg(X\vee Y) \\ \downarrow \\ | \\ \neg X \\ \neg Y \end{array}$$

Ottava regola (β)

$$\begin{array}{c} X\leftrightarrow Y \\ \downarrow \\ \begin{array}{cc} | & | \\ X & \neg X \\ Y & \neg Y \end{array} \end{array}$$

Nona regola (β)

$$\begin{array}{c} \neg(X\leftrightarrow Y) \\ \downarrow \\ \begin{array}{cc} | & | \\ X & \neg X \\ \neg Y & Y \end{array} \end{array}$$

È opportuno contrassegnare (useremo: “♦”) gli ultimi nodi dei rami chiusi.

Esempio. Confutiamo:

$$\neg\{[(A\to B)\wedge(B\to C)]\to(A\to C)\}$$

Applichiamo innanzitutto la terza regola; otteniamo:

$$\begin{array}{c}\neg\{[(A\to B)\wedge(B\to C)]\to(A\to C)\}\\ |\\ (A\to B)\wedge(B\to C)\\ \neg(A\to C)\end{array}$$

Applichiamo la quarta regola al primo dei due enunciati ottenuti:

$$\begin{array}{c}\neg\{[(A\to B)\wedge(B\to C)]\to(A\to C)\}\\ |\\ (A\to B)\wedge(B\to C)\\ \neg(A\to C)\\ |\\ A\to B\\ B\to C\\ \neg(A\to C)\end{array}$$

e quindi la terza regola all’enunciato $\neg(A\to C)$:

$$\begin{array}{c}\neg\{[(A\to B)\wedge(B\to C)]\to(A\to C)\}\\ |\\ (A\to B)\wedge(B\to C)\\ \neg(A\to C)\\ |\\ A\to B\\ B\to C\\ \neg(A\to C)\\ |\\ A\to B\\ B\to C\\ A\\ \neg C\end{array}$$

Applichiamo la seconda regola al primo enunciato dell'ultimo nodo (introducendo così una biforcazione nel tableau):

$$
\begin{array}{c}
\neg\{[(A\to B)\land(B\to C)]\to(A\to C)\}\\
|\\
(A\to B)\land(B\to C)\\
\neg(A\to C)\\
|\\
A\to B\\
B\to C\\
\neg(A\to C)\\
|\\
A\to B\\
B\to C\\
A\\
\neg C\\
\begin{array}{cc}
| & |\\
B\to C & B\to C\\
A & A\\
\neg C & \neg C\\
\neg A & B\\
\blacklozenge &
\end{array}
\end{array}
$$

Il ramo che termina con $\neg A$ (quello a sinistra) è chiuso, in quanto nell'ultimo nodo troviamo sia A che $\neg A$; possiamo abbandonarne l'esame e proseguire la formazione del tableau con il solo ramo a destra. Applichiamo ora la seconda regola a $B\to C$ (e ciò provoca un'ulteriore biforcazione):

$$
\begin{array}{c}
\neg\{[(A\to B)\land(B\to C)]\to(A\to C)\}\\
|\\
(A\to B)\land(B\to C)\\
\neg(A\to C)\\
|\\
A\to B\\
B\to C\\
\neg(A\to C)\\
|\\
A\to B\\
B\to C\\
A\\
\neg C
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
| & | & & \\
B\to C & B\to C & & \\
A & A & & \\
\neg C & \neg C & & \\
\neg A & B & & \\
\blacklozenge & & | & | \\
 & & A & A \\
 & & \neg C & \neg C \\
 & & B & B \\
 & & \neg B & C \\
 & & \blacklozenge & \blacklozenge
\end{array}
$$

I rami formati sono chiusi: quello a sinistra per la presenza contemporanea di B e $\neg$B nell'ultimo nodo; quello a destra per la presenza contemporanea di C e $\neg$C nell'ultimo nodo. *Tutti i rami del tableau risultano dunque chiusi: l'enunciato di partenza è confutato e ciò significa che la sua negazione*:

$$[(A\to B)\wedge(B\to C)]\to(A\to C)$$

è una tautologia (talvolta detta *legge del sillogismo ipotetico*).

Esempio. Esaminiamo la formula:

$$P\wedge[(\neg Q)\vee(\neg P)]$$

Proviamo a costruire il tableau della formula data (non negata):

$$
\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{c}{P\wedge[(\neg Q)\vee(\neg P)]} \\
\multicolumn{2}{c}{|} \\
\multicolumn{2}{c}{P} \\
\multicolumn{2}{c}{(\neg Q)\vee(\neg P)} \\
| & | \\
P & P \\
\neg Q & \neg P \\
 & \blacklozenge
\end{array}
$$

Non abbiamo ottenuto un tableau chiuso: il ramo a sinistra non è chiuso.

Esempio. Proviamo allora a costruire il tableau della negazione della formula esaminata nell'esempio precedente:

$$\neg\{P\wedge[(\neg Q)\vee(\neg P)]\} \quad \text{o} \quad (\neg P)\vee\{\neg[(\neg Q)\vee(\neg P)]\}$$

che può essere dunque scritta: $(\neg P)\vee(Q\wedge P)$.

È impossibile ottenere un tableau chiuso: dalla $(\neg P)\vee(Q\wedge P)$ ricaviamo:

$$\begin{array}{ccc} & (\neg P)\vee(Q\wedge P) & \\ | & & | \\ \neg P & & Q\wedge P \end{array}$$

ed anche l'aggiunta di Q, P (considerando la formula $Q\wedge P$ nel nodo di destra) non ci consentirà di chiudere il tableau.

11.3. Correttezza e completezza

Il metodo dei tableaux proposizionali (che estenderemo, nella prossima sezione, in modo da considerare anche formule predicative) consente di stabilire se una formula è valida.

Si può provare innanzitutto che la costruzione di un tableau proposizionale, condotta secondo il procedimento precedentemente descritto, termina dopo un numero *finito* di passi e che su ogni foglia abbiamo soltanto enunciati atomici o loro negazioni (detti anche letterali). Si prova inoltre che, detto T un tableau completo per P, P è insoddisfacibile se e soltanto se il tableau T è chiuso.

Teorema. Correttezza e completezza del metodo dei tableaux. La formula P è valida (è una tautologia) se e solo se il tableau per $\neg$P è chiuso.

Dimostrazione. Correttezza. Dimostreremo che se un sottoalbero radicato nel nodo n del tablau T è chiuso, allora l'insieme di formule U(n) in n è insoddisfacibile. La dimostrazione è per induzione sull'altezza h del nodo n nel tableau considerato.

Se $h = 0$ e il tableau T è chiuso, allora il nodo contiene due enunciati che sono uno la negazione dell'altro e pertanto U(n) è insoddisfacibile.

Se $h>0$, allora è stata utilizzata qualche regola di tipo α per un connettivo riconducibile a "$\wedge$" o di tipo β per un connettivo riconducibile a "$\vee$".

$$\begin{array}{c} U(n) = \{P_1\wedge P_2\}\cup U_0 \\ | \\ U(n') = \{P_1;\ P_2\}\cup U_0 \end{array}$$

Nel caso delle regole α, è: $U(n) = \{P_1 \wedge P_2\} \cup U_0$ e $U(n') = \{P_1; P_2\} \cup U_0$ (dove U_0 può essere vuoto) e l'altezza di n' è $h-1$, dunque, per l'ipotesi induttiva, $U(n')$ è insoddisfacibile. Quindi, se indichiamo con v una qualsiasi interpretazione, deve essere $v(P') = F$ per qualche $P' \in U(n')$. Abbiamo tre possibilità: (1) per qualche $P_0 \in U_0$ è $v(P_0) = F$; ma è $P_0 \in U_0 \subseteq U(n')$; (2) $v(P_1) = F$; allora $v(P_1 \wedge P_2) = F$; (3) $v(P_2) = F$; ancora $v(P_1 \wedge P_2) = F$. Essendo, per qualche $P \in U(n)$, $v(P) = F$, $U(n)$ è insoddisfacibile.

$$U(n) = \{P_1 \vee P_2\} \cup U_0$$

$$U(n') = \{P_1\} \cup U_0 \qquad U(n'') = \{P_2\} \cup U_0$$

Nel caso delle regole β, è: $U(n) = \{P_1 \vee P_2\} \cup U_0$, $U(n') = \{P_1\} \cup U_0$ e $U(n'') = \{P_2\} \cup U_0$; per l'ipotesi induttiva, sia $U(n')$ che $U(n'')$ sono insoddisfacibili. Quindi, se indicando ancora con v una qualsiasi interpretazione, abbiamo due possibilità: (1) per qualche $P_0 \in U_0$ è $v(P_0) = F$; ma è $P_0 \in U_0 \subseteq U(n')$; (2) se invece è $v(P_0) = V$, affinché sia $U(n')$ che $U(n'')$ siano insoddisfacibili deve essere $v(P_1) = v(P_2) = F$, quindi $v(P_1 \vee P_2) = F$. Da ciò possiamo nuovamente concludere che $U(n)$ è insoddisfacibile (Ben-Ari, 1998, pp. 40-41).

Completezza. Per dimostrare che se P è insoddisfacibile allora il tableau per P è chiuso, proveremo che se in tale tableau c'è un ramo aperto allora P è soddisfacibile. Procediamo ancora per induzione sull'altezza h del nodo n nel tableau considerato.

Se $h = 0$ e il tableau T è aperto, allora il nodo non contiene due letterali che sono uno la negazione dell'altro e P è soddisfacibile.

Se $h>0$, allora è stata utilizzata qualche regola di tipo α per un connettivo riconducibile a "$\wedge$" o di tipo β per un connettivo riconducibile a "$\vee$".

Nel caso delle regole α, ragionando come precedentemente fatto nel caso della correttezza, esiste un'interpretazione v tale che $v(P') = V$ per ogni $P' \in U(n')$ e $U(n)$ è soddisfacibile.

Nel caso delle regole β, esiste un'interpretazione v tale che per ogni $P_0 \in U_0$ è $v(P_0) = V$ e che almeno uno dei $v(P_1)$, $v(P_2)$ sia V, da ciò segue che $v(P_1 \vee P_2) = V$; dunque $U(n)$ è soddisfacibile. cvd

Nella sezione seguente riprenderemo questo risultato nel caso delle formule predicative.

12. IL SISTEMA DI GENTZEN

12.1. Il sistema deduttivo di Gentzen

Il sistema di Gentzen (sistema *G*), che in questo paragrafo esamineremo nella sua versione proposizionale, rende possibile la deduzione di una formula a partire da alcuni assiomi operando mediante delle regole di inferenza. Un assioma è un insieme di formule U che contiene un enunciato e la sua negazione (P e ¬P).

Nel metodo dei tableaux proposizionali abbiamo considerato delle regole α e delle regole β (la denominazione dipende da eventuali biforcazioni introdotte nel tableau considerato). Faremo ora un'analoga distinzione, sebbene con significato operativamente diverso, anche nel caso delle regole di inferenza per un sistema di Gentzen.

Considereremo regole basate sulle tabelle seguenti:

α	α_1	α_2
P	¬(¬P)	
P∨Q	P	Q
¬(P∧Q)	¬P	¬Q
P→Q	¬P	Q
¬(P↔Q)	¬(P→Q)	¬(Q→P)

β	β_1	β_2
P∧Q	P	Q
¬(P∨Q)	¬P	¬Q
¬(P→Q)	P	¬Q
P↔Q	P→Q	→P

Le regole di inferenza sono dei due tipi seguenti (α e β):

Regola di inferenza relativa alla tabella di tipo α:

$$\frac{U \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}}{U \cup \{\alpha\}}$$

Regola di inferenza relativa alla tabella di tipo β:

$$\frac{U_1 \cup \{\beta_1\} \qquad\qquad U_2 \cup \{\beta_2\}}{U_1 \cup U_2 \cup \{\beta\}}$$

Una dimostrazione nel sistema *G* è una sequenza di insiemi di formule tale che ciascun elemento o è un assioma o può essere inferito da elementi precedenti.

L'ultimo elemento P è detto dimostrabile:

$\vdash P$

Esempio. Dimostriamo nel sistema *G* il teorema:

$\vdash (A\lor B)\to(B\lor A)$

La dimostrazione è la seguente:

1.	$\neg A,\ B,\ A$	Assioma
2.	$\neg B,\ B,\ A$	Assioma
3.	$\neg(A\lor B),\ B,\ A$	β
4.	$\neg(A\lor B),\ (B\lor A)$	α
5.	$(A\lor B)\to(B\lor A)$	α (cvd)

12.2. Deduzione di Gentzen e tableau

Una deduzione nel sistema di Gentzen può essere posta in forma di albero: anticipiamo che tale possibilità si rivelerà interessante per il collegamento che essa consentirà con il metodo dei tableaux.

Esempio. La dimostrazione dell'esempio precedente in forma di albero è:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\neg A, B, A \arrow[dr, no head] & & \neg B, B, A \arrow[dl, no head] \\
& \neg(A\lor B),\ B,\ A \arrow[d, no head] & \\
& \neg(A\lor B),\ (B\lor A) \arrow[d, no head] & \\
& (A\lor B)\to(B\lor A) &
\end{tikzcd}$$

In essa risulta evidenziato il ruolo della regola di inferenza di tipo β (corrispondente alla biforcazione) e delle due regole di tipo α, applicate successivamente.

Al lettore non sfuggirà l'analogia di tale disposizione di formule con il tableau (graficamente "capovolto") che potrebbe essere costruito per la negazione della formula $(A\vee B) \rightarrow (B\vee A)$. Nell'esempio seguente costruiremo tale tableau.

Esempio. Il tableau della negazione di $(A\vee B)\rightarrow(B\vee A)$ è:

$$
\begin{array}{ccc}
 & \neg[(A\vee B)\rightarrow(B\vee A)] & \\
 & | & \\
 & A\vee B & \\
 & \neg(B\vee A) & \\
 & | & \\
 & A\vee B & \\
 & \neg B & \\
 & \neg A & \\
| & & | \\
A & & B \\
\neg B & & \neg B \\
\neg A & & \neg A \\
\blacklozenge & & \blacklozenge
\end{array}
$$

Consideriamo la deduzione di Gentzen della formula $(A\vee B) \rightarrow (B\vee A)$ che abbiamo ricavato nell'esempio precedente. In essa compaiono formule simili a quelle che compaiono in questo tableau: in particolare, le formule del tableau sono le negazioni delle formule che compaiono nell'albero che rappresenta la deduzione di Gentzen.

In particolare, gli assiomi dai quali la precedente deduzione nel sistema di Gentzen trae origine ($\neg A, B, A$ e $\neg B, B, A$) possono essere ritrovati, a parte le negazioni, nei nodi finali del tableau che consentono la chiusura dei rami:

$A, \neg B, \neg A$	$B, \neg B, \neg A$	(chiusura del ramo del tableau)
$\neg A, B, A$	$\neg B, B, A$	(assioma di Gentzen)

Esempio. Dimostriamo nel sistema *G* il teorema:

$$\neg\{(A\vee B)\wedge[(\neg A)\wedge(\neg B)]\}$$

La deduzione è la seguente:

$$
\begin{array}{c}
\neg A,\ A,\ B \qquad\qquad \neg B,\ A,\ B \\
| \qquad\qquad\qquad | \\
\neg(A\vee B),\ A,\ B \\
| \\
\neg(A\vee B),\ \neg(\neg A),\ \neg(\neg B) \\
| \\
\neg(A\vee B),\ \neg[(\neg A)\vee(\neg B)] \\
| \\
\neg\{(A\vee B)\wedge[(\neg A)\wedge(\neg B)]\}
\end{array}
$$

Costruiamo ora il tableau della negazione di $\neg\{(A\vee B)\wedge[(\neg A)\wedge(\neg B)]\}$, ovvero il tableau di $(A\vee B)\wedge[(\neg A)\wedge(\neg B)]$:

$$
\begin{array}{c}
(A\vee B)\wedge[(\neg A)\wedge(\neg B)] \\
| \\
A\vee B \\
(\neg A)\wedge(\neg B) \\
| \\
A\vee B \\
\neg A \\
\neg B \\
| \qquad\quad | \\
A \qquad\quad B \\
\neg A \qquad \neg A \\
\neg B \qquad \neg B \\
\blacklozenge \qquad\quad \blacklozenge
\end{array}
$$

Analogamente a quanto fatto per il metodo dei tableaux proposizionali, enunciamo il teorema di completezza e di correttezza.

Teorema. Correttezza e completezza del sistema di Gentzen. Una formula è valida se e solo se è dimostrabile nel sistema di Gentzen.

La dimostrazione di ciò è ovvia in quanto si riconduce a quanto dimostrato alla fine della precedente sezione per il metodo dei tableaux.

13. CENNI SUL SISTEMA DI HILBERT

13.1. Il sistema di Hilbert

Il sistema deduttivo di Hilbert, al quale dedicheremo il presente paragrafo, precede il sistema di Gentzen, dal punto di vista storico. Esso formalizza il ragionamento matematico e si basa su alcuni assiomi (schemi di assiomi) e su di una regola di inferenza. Altre regole derivate saranno utili per l'applicazione pratica.

Le seguenti formule sono assiomi in un sistema di Hilbert (sistema *H*):

$\vdash A\to(B\to A)$	Assioma 1
$\vdash [A\to(B\to C)]\to[(A\to B)\to(A\to C)]$	Assioma 2
$\vdash [(\neg B)\to(\neg A)]\to(A\to B)$	Assioma 3

(con il simbolo $\vdash$ esprimiamo, al solito, la dimostrabilità).

Osserviamo innanzitutto che ci sono infiniti assiomi perché A, B possono essere a loro volta sostituite con qualsiasi formula (dunque le formule precedenti devono essere considerate non come singoli assiomi bensì come *schemi di assiomi*).

La regola di inferenza nel sistema di Hilbert è detta *Modus Ponens* (MP):

$$\frac{\vdash A \qquad\qquad \vdash (A\to B)}{\vdash B}$$

Esempio. Dimostriamo nel sistema *H* il teorema:

$$\vdash A\to A$$

La dimostrazione è la seguente:

1.	$\vdash \{A\to[(A\to A)\to A]\}\to\{[A\to(A\to A)]\to(A\to A)\}$	Assioma 2
2.	$\vdash A\to[(A\to A)\to A]$	Assioma 1
3.	$\vdash [A\to(A\to A)]\to(A\to A)$	MP 1, 2
4.	$\vdash A\to(A\to A)$	Assioma 1
5.	$\vdash A\to A$	MP3,4 (cvd)

Da questo esempio introduttivo si può notare che una formula estremamente semplice (la tesi era $\vdash A\to A$) richiede già una dimostrazione tecnicamente piuttosto complicata. Ciò suggerisce l'opportunità di introdurre alcune *regole derivate* per il sistema *H*, che siano più potenti del solo MP. Con la scrittura:

$$U \vdash A$$

indicheremo che le formule presenti in U sono ipotesi della dimostrazione di A.

13.2. Regole derivate del sistema di Hilbert

Come sopra anticipato, il sistema di Hilbert nella forma originale (avente il *Modus Ponens* come unica regola di inferenza) appare di applicazione assai ostica. Per agevolarne l'uso vengono pertanto introdotte, nel sistema *H*, le seguenti *regole derivate*:

Regola di deduzione:

$$\frac{U \cup \{A\} \vdash B}{U \vdash A \to B}$$

Proposizione. La regola di deduzione è una regola derivata corretta.

Dimostrazione (Ben-Ari, 1998, pp. 53-54). Si procede per induzione sulla lunghezza *n* della dimostrazione $U \cup \{A\} \vdash B$.

Se $n = 1$, B si dimostra in un passo, dunque B può essere un elemento di U oppure un assioma. Se B è A, allora è $\vdash A \to B$ in quanto $\vdash A \to A$ (si veda l'esempio precedente), dunque $U \vdash A \to B$. Altrimenti una dimostrazione (in cui non si usa la regola derivata) di $U \vdash A \to B$ è:

1.	$U \vdash B$	Ipotesi o Assioma
2.	$U \vdash B \to (A \to B)$	Assioma 1
3.	$U \vdash A \to B$	MP 1,2 (cvd)

Se è $n>1$, l'ultimo passo nella dimostrazione di $U \cup \{A\} \vdash B$ è un'inferenza di un passo di B oppure un'inferenza di B che usa il *Modus Ponens*. Nel primo caso il risultato si ottiene dalla dimostrazione per $n = 1$. Se è stato usato il *Modus Ponens*, allora esiste una formula C tale che la *i*-esima formula nella dimostrazione è $U \cup \{A\} \vdash C$ e la *j*-esima formula è $U \cup \{A\} \vdash C \to B$, essendo $i<n$ e $j<n$. Mediante l'ipotesi induttiva, si ottiene una dimostrazione di $U \vdash A \to C$ e di $U \vdash A \to (C \to B)$. Una dimostrazione di $U \vdash A \to B$ è:

i'.	U $\vdash$ A$\rightarrow$C	
j'.	U $\vdash$ A$\rightarrow$(C$\rightarrow$B)	
j'+1.	U $\vdash$ (A$\rightarrow$(C$\rightarrow$B))$\rightarrow$((A$\rightarrow$C)$\rightarrow$(A$\rightarrow$B))	Assioma 2
j'+2.	U $\vdash$ (A$\rightarrow$C)$\rightarrow$(A$\rightarrow$B)	MP *j'*, *j'*+1
j'+3.	U $\vdash$ A$\rightarrow$B	MP *i'*, *j'*+2 (cvd)

Possiamo allora concludere che ogni dimostrazione che usa la regola di deduzione può essere trasformata in una dimostrazione che non la usa. cvd

Regola di contrapposizione:

$$\frac{\vdash (\neg B)\rightarrow(\neg A)}{\vdash A\rightarrow B}$$

Regola di transitività:

$$\frac{U \vdash A\rightarrow B \qquad\qquad U \vdash B\rightarrow C}{U \vdash A\rightarrow C}$$

Regola di scambio della premessa:

$$\frac{U \vdash A\rightarrow(B\rightarrow C)}{U \vdash B\rightarrow(A\rightarrow C)}$$

Regola della doppia negazione:

$$\frac{\vdash [\neg(\neg A)]}{\vdash A}$$

Negli esempi seguenti utilizzeremo alcune regole derivate.

Esempio. Dimostriamo nel sistema *H* il teorema:

$\vdash$ (A$\vee$B)$\rightarrow$(B$\vee$A)

La dimostrazione è la seguente:

1.	$\{\neg A \to B, \neg B\} \vdash \neg A \to B$	Ipotesi
2.	$\{\neg A \to B, \neg B\} \vdash \neg B \to \neg\neg A$	Contrapposizione
3.	$\{\neg A \to B, \neg B\} \vdash \neg B$	Ipotesi
4.	$\{\neg A \to B, \neg B\} \vdash \neg\neg A$	MP 2, 3
5.	$\{\neg A \to B, \neg B\} \vdash A$	Doppia negazione 4
6.	$\{\neg A \to B\} \vdash \neg B \to A$	Deduzione 5
7.	$\vdash (\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$	Deduzione 6
8.	$\vdash (A \vee B) \to (B \vee A)$	Definizione di $\vee$ (cvd)

Esempio. Dimostriamo nel sistema *H* il teorema:

$$\vdash (\neg A) \to (A \to B)$$

La dimostrazione è la seguente:

1.	$\{\neg A, A\} \vdash (\neg A) \to [(\neg B) \to (\neg A)]$	Assioma 1
2.	$\{\neg A, A\} \vdash \neg A$	Ipotesi
3.	$\{\neg A, A\} \vdash (\neg B) \to (\neg A)$	MP 1, 2
4.	$\{\neg A, A\} \vdash [(\neg B) \to (\neg A)] \to (A \to B)$	Assioma 3
5.	$\{\neg A, A\} \vdash A \to B$	MP 3, 4
6.	$\{\neg A, A\} \vdash A$	Ipotesi
7.	$\{\neg A, A\} \vdash B$	MP 5, 5
8.	$\{\neg A\} \vdash A \to B$	Deduzione 7
9.	$\{\neg A, A\} \vdash (\neg A) \to (A \to B)$	Deduzione 8 (cvd)

In base a questo teorema, se si potesse dimostrare una formula e la sua negazione allora si potrebbe provare qualsiasi cosa.

Ciò suggerisce qualche riflessione informale: il fatto che un sistema di inferenza riesca a produrre sia un enunciato che il suo opposto sarebbe un fatto molto grave; dunque in un sistema logico non possono "convivere" A e $\neg$A a meno che quel sistema non sia "banale", ovvero… dimostri "tutto".

Analogamente a quanto fatto per il metodo dei tableaux proposizionali e per il sistema di Gentzen, enunciamo il teorema di completezza e di correttezza.

Teorema. Correttezza e completezza del sistema di Hilbert. Una formula è valida se e solo se è dimostrabile nel sistema di Hilbert.

La dimostrazione di correttezza si conduce notando che gli assiomi sono validi in quanto è possibile costruire i tableaux semantici per le loro negazioni (il lettore può farlo per esercizio); se la regola di inferenza (*Modus Ponens*) non fosse corretta, potremmo trovare un insieme di formule {A, A→B, B} tale che siano valide A, A→B, ma non B. Allora esisterebbe un'interpretazione v tale che v(B) = F. Dalla validità di A e di A→B segue v(A) = v(A→B) = V per ogni interpretazione; e da qui: v(B) = V, in contraddizione con quanto sopra posto.

Per quanto riguarda la completezza del sistema di Hilbert, si può dimostrare che ogni dimostrazione nel sistema di Gentzen può essere meccanicamente trasformata in una dimostrazione nel sistema di Hilbert; e sappiamo inoltre che ogni formula valida può essere verificata nel sistema di Gentzen (per i dettagli della dimostrazione rimandiamo a: Ben-Ari, 1998, pp. 61-64).

Esercizi sul Capitolo 3

3.1. Dire, giustificando la risposta, se $[(\neg A)\wedge A] \vee [A\wedge(\neg B)\wedge C\wedge B] \vee (\neg C)$ è soddisfacibile. Si tratta di una tautologia?

3.2. Con il metodo dei tableaux e con il metodo di Gentzen, verificare che $[A\vee(\neg B)]\rightarrow[(\neg B)\vee A]$ è una tautologia.

3.3. Con il metodo dei tableaux e con il metodo di Gentzen, verificare che $\neg\{[A\vee B)\leftrightarrow(B\vee A)]$ è insoddisfacibile.

3.4. Dimostrare nel sistema H: $\vdash A\rightarrow[(\neg A)\rightarrow B)]$.

Soluzioni degli esercizi sul Capitolo 3

3.1. È soddisfacibile: assume valore di verità vero se e solo C è falsa. Dunque non è una tautologia.

3.2. Si vedano gli esempi dei paragrafi 12.1 e 12.2, nei quali è dimostrato che $(A \lor B) \rightarrow (B \lor A)$ è una tautologia.

3.3. Si operi come nell'esercizio precedente.

3.4. Si veda l'ultimo esempio del paragrafo 13.2, in cui è stato dimostrato: $\vdash (\neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$.

LIBRARY OF USEFUL KNOWLEDGE.

THE

DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS

CONTAINING

DIFFERENTIATION, INTEGRATION, DEVELOPMENT, SERIES, DIFFERENTIAL EQUATIONS, DIFFERENCES, SUMMATION, EQUATIONS OF DIFFERENCES, CALCULUS OF VARIATIONS, DEFINITE INTEGRALS,—WITH APPLICATIONS TO ALGEBRA, PLANE GEOMETRY, SOLID GEOMETRY, AND MECHANICS.

ALSO,

ELEMENTARY ILLUSTRATIONS OF THE DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS.

BY

AUGUSTUS DE MORGAN, F.R.A.S. AND C.P.S.,

OF TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE,

PROFESSOR OF MATHEMATICS IN UNIVERSITY COLLEGE, LONDON.

Ταῦτα δὲ τοῖς μὲν πολλοῖς καὶ μὴ κεκοινωνηκότεσσι τῶν μαθημάτων οὐκ εὔπιστα φανήσειν ὑπολαμβάνω· τοῖς δὲ μεταλελαβηκότεσσι, καὶ περὶ τῶν ἀποστημάτων καὶ τῶν μεγεθέων, τᾶς τε γᾶς, καὶ τοῦ ἁλίου, καὶ τᾶς σελήνας, καὶ τοῦ ὅλου κόσμου, πεφροντικότεσσι, πιστὰ διὰ τὰν ἀπόδειξιν ἐσσεῖσθαι. Διόπερ ᾠήθην καί τινας οὐκ ἀνάρμοστον εἴη ἔτι ἐπιθεωρῆσαι ταῦτα.—ARCHIMEDES.

PUBLISHED UNDER THE SUPERINTENDENCE OF THE SOCIETY FOR THE DIFFUSION OF USEFUL KNOWLEDGE.

LONDON: BALDWIN AND CRADOCK,
47, PATERNOSTER-ROW.

MDCCCXLII.

Il frontespizio di *The differential and integral Calculus* (London, 1842) di Augustus De Morgan