IV

Logica dei predicati

14. FORMULE PREDICATIVE E QUANTIFICATORI

> "Il simbolo '$(x).\varphi(x)$' [per ogni x, $\varphi(x)$ è vera] denota una proposizione definita, e non c'è alcuna differenza, quanto al significato, fra '$(x).\varphi(x)$' e '$(y).\varphi(y)$' quando esse compaiono nello stesso contesto. Così, la 'x' in '$(x).\varphi(x)$' non è una componente ambigua di nessuna espressione in cui compaia '$(x).\varphi(x)$'".
>
> Bertrand Russell e Alfred North Whitehead

14.1. Dalla segnatura alle formule predicative

Come abbiamo precedentemente osservato, la logica che abbiamo finora esposto, detta logica degli enunciati, si occupa dei singoli enunciati intesi come blocchi unici, senza cioè esaminare la loro "struttura interna". In altre parole, nell'ambito della logica degli enunciati le due frasi:

Parigi è in Francia
Tutti i quadrati hanno quattro lati

non presentano alcuna differenza sostanziale. Si tratta infatti di due enunciati (peraltro entrambi veri), e dicendo ciò non si fa riferimento alla loro ben diversa struttura: il primo di essi è evidentemente riferito ad un *singolo* soggetto (Parigi), al quale viene attribuita una certa proprietà (quella di trovarsi in Francia); la seconda frase, invece, coinvolge *tutti* i quadrati (quindi ha molti soggetti) e ad essi (ovvero: a ciascun quadrato) riferisce la proprietà di avere quattro lati.

Condurremo ora un'analisi più dettagliata di un enunciato: l'insieme dei concetti e dei procedimenti che dovremmo trattare viene detto *logica dei predicati* (o *calcolo dei predicati*). Esso contiene come parte propria la logica degli enunciati.

Riprendiamo l'introduzione che era stata proposta per la logica degli enunciati; l'alfabeto era costituito da lettere maiuscole per indicare enunciati, da connettivi e da alcuni segni come le parentesi o la virgola. Tale alfabeto non è sufficiente nel caso della logica dei predicati: sarà necessaria una più ricca *segnatura predicativa*, cioè un insieme Σ di simboli mediante i quali indicare enunciati, relazioni, funzioni (Bellacicco & Labella, 1979, pp. 136-137).

L'alfabeto di una logica dei predicati si compone di simboli per variabili, x, y, z (con indici), simboli per costanti, a, b, c (con indici) e di simboli funzionali a 1, 2, … posti (si dice: di *arietà* 1, 2, …), f, g, h (eventualmente con indici).

Osserviamo che i *termini* di una logica dei predicati possono già essere costruiti induttivamente: variabili e costanti sono termini; se $t_1, ..., t_n$ sono termini e f ha n posti, $f(t_1, ..., t_n)$ è un termine.

L'alfabeto di una logica dei predicati si compone inoltre di:

- simboli predicativi a 1, 2, … posti;
- i connettivi: $\neg$, $\rightarrow$ ($\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$ sono definiti di conseguenza).
- il quantificatore universale $\forall$ ($\exists$ sarà definito di conseguenza);
- parentesi e virgole.

Una formula è un'espressione così costruibile induttivamente:

- se A ha n posti e $t_1, ..., t_n$ sono termini, $\mathrm{A}(t_1, ..., t_n)$ è una formula;
- se A, B sono formule, lo sono anche $\neg A$, $A \rightarrow B$. Si assume che $A \wedge B$, $A \vee B$ e $A \leftrightarrow B$ siano definite come fatto nella logica degli enunciati;
- se A è una formula, lo è anche $\forall xA$ dove x è una variabile. Si assumerà, come vedremo, che $\exists xA$ sia un'abbreviazione di $\neg(\forall x(\neg A))$.

Spesso nella scrittura si omettono virgole e parentesi, quando ciò non genera confusione.

14.2. I quantificatori

Abbiamo sopra introdotto formalmente il simbolo $\forall$ ed abbiamo anticipato che sulla base di esso sarà introdotto il simbolo $\exists$. Dedicheremo ora alcune osservazioni a tali simboli fondamentali della logica dei predicati.

Nella logica dei predicati si utilizzano spesso frasi del tipo:

Esiste (almeno) un oggetto x che verifica la proprietà P
Per ogni oggetto y è verificata la proprietà Q

La formalizzazione della prima frase sopra riportata necessita di un *quantificatore esistenziale* $\exists$ che garantisca l'esistenza di almeno un oggetto tale da verificare una proprietà data; la seconda, di un *quantificatore universale* $\forall$ che garantisca il rispetto della proprietà data da parte di tutti gli oggetti di una considerata totalità.

Introduciamo tali simboli con le considerazioni seguenti: il simbolo $\exists x$ P significa che esiste (almeno) un x che verifica la proprietà P. $\exists$ è denominato *quantificatore esistenziale*. Il simbolo $\forall x$ P significa che per ogni x è verificata la proprietà P. $\forall$ è denominato *quantificatore universale*.

Come precedentemente anticipato, il quantificatore esistenziale $\exists$ può essere definito a partire dal quantificatore $\forall$ e dall'operatore di negazione $\neg$; dire che esiste almeno un x per cui è verificata la proprietà P equivale a dire che non per ogni x per la proprietà P risulta non verificata. In simboli:

$(\exists x)$ P equivale a: $\neg((\forall x)(\neg \mathrm{P}))$

Osserviamo che, analogamente, il quantificatore universale $\forall$ potrebbe essere definito a partire dal quantificatore $\exists$ e dall'operatore di negazione $\neg$; dire che per ogni x è verificata la proprietà P equivale infatti a dire che non esiste alcun x per cui la proprietà P risulta non verificata:

$(\forall x)$ P equivale a: $\neg((\exists x)(\neg \mathrm{P}))$

Ad esempio, al posto degli enunciati:

Esiste (almeno) un quadrilatero equilatero
Ogni italiano è europeo

possiamo scrivere:

Non ogni quadrilatero è non equilatero
Non esiste alcun italiano che non sia europeo

Ciò consente di precisare alcune importanti osservazioni riguardanti la negazione di una frase quantificata, che riassumiamo così (ricordiamo che l'enunciato $\neg(\neg \mathrm{A})$ equivale ad A):

- la negazione di: $(\exists x)$ P è: $\neg(\neg((\forall x)(\neg \mathrm{P})))$
  ovvero è: $(\forall x)(\neg \mathrm{P})$

- la negazione di: $(\forall x)$ P è: $\neg(\neg((\exists x)(\neg \mathrm{P})))$
  ovvero è: $(\exists x)(\neg \mathrm{P})$

Esempio. Le negazioni dei due enunciati:

Esiste (almeno) un quadrilatero equilatero
Ogni italiano è europeo

sono, rispettivamente, gli enunciati:

Ogni quadrilatero non è equilatero
Esiste (almeno) un italiano che non è europeo

Osservazione. Le frasi sopra scritte sono state ottenute combinando alcuni termini che abbiamo introdotto in ambito logico; ma in italiano, ad esempio, l'espressione *Ogni quadrilatero non è equilatero* non viene usata. Essa è sempre sostituita dalla frase (con lo stesso significato): *Nessun quadrilatero è equilatero*.

Esempio. Torniamo all'antinomia di Epimenide, precedentemente ricordata ("Io sto mentendo": la denominazione è tratta da Epimenide di Cnosso, VI sec. a. C., citato nella I lettera di Paolo a Tito, 12), a volte espressa nella forma:

Epimenide (cretese) afferma: "Tutti i Cretesi sono mentitori"

Talvolta a questa frase si attribuisce il carattere di antinomia: è vero?

Se indichiamo con Cx "$x \in$ C (insieme dei Cretesi)" e con P(x; y) "x pronuncia la frase y", possiamo scrivere:

$$\forall x\{\mathrm{C}x \to \forall y[\mathrm{P}(x;\, y) \to (y \leftrightarrow (\mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{A}))]\}$$

La sua negazione $\neg\forall x\{\mathrm{C}x \to \forall y[\mathrm{P}(x;\, y) \to (y \leftrightarrow (\mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{A}))]\}$ è:

$$\exists x \neg\{\mathrm{C}x \to \forall y[\mathrm{P}(x;\, y) \to (y \leftrightarrow (\mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{A}))]\}$$

dunque (la falsità di A→B si ha se e solo se A è vero e B è falso):

$$\exists x\{\mathrm{C}x \wedge \neg\forall y[\mathrm{P}(x;\, y) \to (y \leftrightarrow (\mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{A}))]\}$$
$$\exists x\{\mathrm{C}x \wedge \exists y \neg\, [\mathrm{P}(x;\, y) \to (y \leftrightarrow (\mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{A}))]\}$$
$$\exists x\{\mathrm{C}x \wedge \exists y[\mathrm{P}(x;\, y) \wedge \neg (y \leftrightarrow (\mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{A}))]\}$$

La possibilità di soddisfare tale frase dipende dunque dalla disponibilità di elementi di C diversi da Epimenide (che pronuncia la frase stessa!). Non si tratta di un vera e propria antinomia: Epimenide potrebbe mentire e ciò comporterebbe soltanto la presenza di Cretesi veritieri (diversi da Epimenide).

Invece l'affermazione *"Io sto mentendo"* sarebbe assai più grave (se chi pronuncia tale frase dice la verità, allora egli sta effettivamente mentendo e questa è una contraddizione; se chi pronuncia tale frase mente, allora egli non sta mentendo e, di conseguenza, sta dicendo la verità ed anche questa è una contraddizione). Tale situazione si riferisce alla falsità di una frase attualmente pronunciata; una frase di tal genere potrebbe essere:

"Questa frase è falsa"

La formalizzazione di tale situazione richiederebbe una sorta di "autoreferenzialità": indicando con φ la frase $y \leftrightarrow (A \wedge \neg A)$, avremmo che al posto di y dovrebbe essere inserita la frase φ stessa; dunque indicheremmo con φ la frase $\varphi \leftrightarrow (A \wedge \neg A)$. Non approfondiremo la questione.

14.3. Variabili vincolate e variabili libere

Definizione. Nella formula $(\forall x \alpha)$, α si chiama *ambito* o *campo d'azione* del quantificatore $\forall$ ed analogamente diremo per $\exists$. Nelle formule $(\forall x \alpha)$, $(\exists x \alpha)$ la variabile x si dice *vincolata* (o *quantificata*).

Specifichiamo che un'occorrenza di una va riabile x si dice vincolata quando essa è la variabile che segue un $\forall$ oppure è nel campo d'azione di un tale quantificatore; lo stesso vale per $\exists$. Un'occorrenza di una variabile non vincolata si dice *libera*. Si noti dunque che all'interno di una formula possono esserci sia occorrenze libere che occorrenze vincolate di x: tale è ad esempio la x nella formula: $\alpha(x) \vee (\forall x)\beta(x)$.

Spesso se una variabile z appare libera nella formula α si scrive $\alpha(z)$.

L'insieme delle variabili nel termine t si indica con: var(t). L'Insieme delle variabili libere della formula α si indica con: free(α).

Diamo anche delle variabili libere una definizione induttiva. Siano C un connettivo binario e Q un quantificatore; allora:

- le variabili libere di $\neg\alpha$ sono quelle di α:

  $\text{free}(\neg\alpha) = \text{free}(\alpha)$

- le variabili libere di $\alpha C \beta$ sono quelle di α unite a quelle di β:

  $\text{free}(\alpha C \beta) = \text{free}(\alpha) \cup \text{free}(\beta)$

- le variabili libere di Q$x\alpha$ sono quelle di α ad eccezione di x:

  free(Q$x\alpha$) = free(α)−{x}

La definizione di variabile vincolata è ispirata alle notazioni con variabile *apparente* in matematica:

la variabile x in: $\lim_{x\to c} f(x)$,

la variabile n in: $\lim_{n\to+\infty} a_n$,

la variabile x in: $\int_a^b f(x)dx$ etc.

Ricordiamo che l'espressione "variabile apparente" (che originariamente era contrapposta a "variabile reale") è stata introdotta nel 1897 da Peano:

"In queste spiegazioni diciamo che una lettera che compare in una formula è *reale* oppure *apparente*, a seconda che il valore della formula dipenda o non dipenda dal nome di questa lettera. Così, in $\int_0^1 x^m dx$ la lettera x è apparente e la lettera m reale. Tutte le lettere che compaiono in un teorema sono apparenti, perché la sua verità è indipendente dai nomi delle lettere" (da: G. Peano, *Formulaire*, 2, 1, 23).

Definizione. Il termine t si dice *liberamente sostituibile* a x nella formula $\alpha(x)$ se sostituendo t in tutte le occorrenze libere di x in $\alpha(x)$ nessuna variabile di t risulta quantificata dopo la sostituzione. In questo caso si scrive $\alpha(t)$.

(Contro)esempio. Scrivendo:

$$\exists y[\neg(x = y)]$$

diciamo che esiste un y diverso da x: affermazione plausibile, ad esempio in un insieme numerico costituito da più elementi distinti. Ma il termine y *non* è liberamente sostituibile a x. Se sostituissimo y al posto di x otterremmo infatti:

$$\exists y[\neg(y = y)]$$

che è un enunciato *falso*.

Ancora per via induttiva può essere definita la *complessità logica* di una formula α, comp(α)$\in \mathbf{N}$.

Siano C un connettivo binario e Q un quantificatore:

- per α atomica, comp(α) = 0
- comp($\alpha C\beta$) = max ({comp(α); comp(β)})+1
- comp($Qx\alpha$) = comp($\neg\alpha$) = comp(α)+1

Un Σ-termine senza variabili si dice *chiuso*.

Siamo in grado, a questo punto, di riprendere rigorosamente il concetto di enunciato sul quale abbiamo basato la sezione precedente: una Σ-formula predicativa senza variabili libere si dice *Σ-formula chiusa* o *Σ-proposizione* o *Σ-enunciato*.

Esempio. Sia x un numero naturale qualsiasi e scriviamo:

$$(\forall x)(x>3)$$

Questa frase ha un ben definito valore di verità: è *falsa*, in quanto esistono naturali (0, 1, 2, 3) che non sono maggiori di 3. Si tratta quindi di un enunciato (dotato di un valore di verità). Anche:

$$(\forall x)(\exists y)(x<y)$$

(con x, y numeri naturali) ha un valore di verità: è *vera* (comunque si scelga x esiste y maggiore di x) e dunque anch'essa è un enunciato. E ciò pur non facendo essa riferimento a numeri fissi, ma a variabili. Invece:

$$(\exists x)(x^2 = y)$$

non è *vera né falsa*; è vera quando y è scelto nell'insieme dei quadrati perfetti (0, 1, 4, 9, ..; se y è un naturale non quadrato, 2, 3, 5, .., è falsa). Non è un enunciato (talvolta si dice che è *aperta*).

Osservazione. Non è difficile rendersi conto che anche operando con la lingua italiana certe "sostituzioni" possono risultare assai problematiche. Ad esempio, la frase "per ogni x esiste y tale che y è padre di x" è plausibilmente vera e può essere (almeno in parte) formalizzata nella scrittura: $(\forall x)(\exists y)$(y è padre di x). Il lettore provi però a considerare per x e per y la stessa persona…

14.4. Modelli e validità

Introduciamo il presente paragrafo, nel quale riprenderemo i concetti presentati nel paragrafo 10.4, con un esempio.

Esempio. Consideriamo il seguente enunciato P:

$$(\forall x)(\exists y)(x+y = 0)$$

che afferma, dunque, che *per ogni x esiste un y tale che x+y = 0.*

Possiamo chiederci: *P è vero o è falso?*

Per rispondere a tale domanda è indispensabile chiarire l'"ambiente" nel quale l'enunciato P deve essere interpretato: in particolare, che cosa viene rappresentato da x e da y?

Se ad esempio x e y sono numeri naturali, P è chiaramente *falso*.

Se invece x e y sono numeri interi (o razionali, o reali, o complessi…) P è un enunciato *vero*.

L'esempio ora riportato evidenzia la necessità di definire il significato delle proposizioni predicative in un qualche universo *U*: ciò significa interpretare in *U* tutti i simboli presenti nella proposizione e fare assumere in *U* i valori delle variabili presenti; un *modello M* è una struttura di dominio *U*.

Se l'enunciato P vale nel *modello M* si scrive:

$$M \models \mathrm{P}$$

Analogamente, sia Φ è un insieme di enunciati (che talvolta viene detto *teoria*); la scrittura:

$$M \models \Phi$$

esprime la relazione di validità di tutti gli enunciati di Φ in *M*.

Data una segnatura Σ, sono impiegati i seguenti simboli (Manca, 2001):

Mod_Σ	per la classe di tutti i Σ-modelli;
$\mathrm{Mod}_\Sigma(\mathrm{P})$	per la classe di tutti i Σ-modelli in cui vale P;
$\mathrm{Mod}_\Sigma(\Phi)$	per la classe di tutti i Σ-modelli che soddisfano tutte le formule di Φ (contemporaneamente).

L'enunciato P è *conseguenza logica* di Φ quando P vale in tutti i modelli in cui valgono tutte le formule di Φ e dunque: $\mathrm{Mod}_\Sigma(\Phi) \subseteq \mathrm{Mod}_\Sigma(\mathrm{P})$.

Ciò si esprime scrivendo:

$\Phi \models P$

e Φ si dice *soddisfacibile* se $Mod_\Sigma(\Phi) \neq \emptyset$.

Se con il simbolo $\perp$ indichiamo un assurdo, $Mod_\Sigma(\perp) = \emptyset$, il fatto che Φ non sia soddisfacibile, si esprime scrivendo:

$\Phi \models \perp$

Esempio. Esprimiamo attraverso la simbologia introdotta il *principio della dimostrazione per assurdo*:

$\Phi \models P$ se e solo se: $\Phi, \neg P \models \perp$

Analogamente a quanto detto nel caso degli enunciati, P si dice *logicamente valido* (o *verità logica* o *tautologia*) quando risulta valido in ogni Σ-struttura. Si scrive allora: $\models P$.

15. IL METODO DEI TABLEAUX E IL CALCOLO DEI PREDICATI

15.1. Tableaux e quantificatori

> 'La logica dei predicati si presenta come un'estensione dell'algebra delle proposizioni. Essa comprende tutta l'algebra delle proposizioni: cioè le proposizioni elementari, considerate come grandezze che assumono uno dei due valori di verità V o F, tutte le operazioni dell'algebra delle proposizioni e, di conseguenza, tutte le sue formule. In più, però, la logica dei predicati introduce, nello studio delle proposizioni, attributi di oggetti. In tale logica le proposizioni vengono analizzate in soggetto e predicato".
>
> P. S. Novikov

La logica dei predicati si presenta come un affinamento della logica degli enunciati; dunque costruiremo i tableaux di formule predicative applicando innanzitutto, ma non solo, le regole introdotte per i tableaux proposizionali.

Introduciamo la questione occupandoci dell'esempio seguente, in cui costruiremo il tableau della negazione della formula predicativa valida $\forall x[P(x)\to Q(x)]\to[\forall xP(x)\to\forall xQ(x)]$:

$$
\begin{array}{c}
\neg\{\forall x[P(x)\to Q(x)]\to[\forall xP(x)\to\forall xQ(x)]\}\\
|\\
\forall x[P(x)\to Q(x)]\\
\neg[\forall xP(x)\to\forall xQ(x)]\\
|\\
\forall x[P(x)\to Q(x)]\\
\forall xP(x)\\
\neg\forall xQ(x)
\end{array}
$$

Il nostro lavoro non è evidentemente finito: il tableau così ottenuto non è chiuso. Esaminiamo l'ultima formula scritta:

$$\neg\forall xQ(x)$$

che sappiamo essere equivalente alla:

$$\exists x\neg Q(x)$$

La costruzione di un tableau, come sappiamo, formalizza la ricerca di un controesempio; dunque a questo punto dobbiamo sostituire alla variabile *x* un qualche elemento del dominio nel quale viene considerata la formula; indichiamo con *a* tale elemento (*istanza*):

$$
\begin{array}{cc}
\neg\{\forall x[P(x)\to Q(x)]\to[\forall xP(x)\to\forall xQ(x)]\} & \\
| & \\
\forall x[P(x)\to Q(x)] & \\
\neg[\forall xP(x)\to\forall xQ(x)] & \\
| & \\
\forall x[P(x)\to Q(x)] & \\
\forall xP(x) & \\
\neg\forall xQ(x) & \text{cioè: } \exists x\neg Q(x)\\
| & \\
\forall x[P(x)\to Q(x)] & \\
\forall xP(x) & \\
\neg Q(a) &
\end{array}
$$

Per quanto riguarda i quantificatori universali, possiamo scrivere le due formule $\forall x[\mathrm{P}(x)\rightarrow\mathrm{Q}(x)]$ e $\forall x\mathrm{P}(x)$ facendo proprio riferimento all'elemento a considerato (sono riferite a *tutti* gli elementi!), dunque scrivendo:

$$\mathrm{P}(a)\rightarrow\mathrm{Q}(a) \qquad \text{e} \qquad \mathrm{P}(a)$$

Otteniamo:

$$\begin{array}{c}
\neg\{\forall x[\mathrm{P}(x)\rightarrow\mathrm{Q}(x)]\rightarrow[\forall x\mathrm{P}(x)\rightarrow\forall x\mathrm{Q}(x)]\} \\
| \\
\forall x[\mathrm{P}(x)\rightarrow\mathrm{Q}(x)] \\
\neg[\forall x\mathrm{P}(x)\rightarrow\forall x\mathrm{Q}(x)] \\
| \\
\forall x[\mathrm{P}(x)\rightarrow\mathrm{Q}(x)] \\
\forall x\mathrm{P}(x) \\
\neg\forall x\mathrm{Q}(x) \\
| \\
\forall x[\mathrm{P}(x)\rightarrow\mathrm{Q}(x)] \\
\forall x\mathrm{P}(x) \\
\neg\mathrm{Q}(a) \\
| \\
\mathrm{P}(a)\rightarrow\mathrm{Q}(a) \\
\mathrm{P}(a) \\
\neg\mathrm{Q}(a)
\end{array}$$

Nel paragrafo successivo sarà necessaria un'importante osservazione su quanto ora fatto, precisazione che, nel caso in esame, non èa indispensabile.

L'applicazione de lla regola proposizionale per $\mathrm{P}(a)\rightarrow\mathrm{Q}(a)$ porta a:

$$\begin{array}{c}
\neg\{\forall x[\mathrm{P}(x)\rightarrow\mathrm{Q}(x)]\rightarrow[\forall x\mathrm{P}(x)\rightarrow\forall x\mathrm{Q}(x)]\} \\
| \\
\forall x[\mathrm{P}(x)\rightarrow\mathrm{Q}(x)] \\
\neg[\forall x\mathrm{P}(x)\rightarrow\forall x\mathrm{Q}(x)] \\
| \\
\forall x[\mathrm{P}(x)\rightarrow\mathrm{Q}(x)] \\
\forall x\mathrm{P}(x) \\
\neg\forall x\mathrm{Q}(x) \\
| \\
\forall x[\mathrm{P}(x)\rightarrow\mathrm{Q}(x)] \\
\forall x\mathrm{P}(x) \\
\neg\mathrm{Q}(a)
\end{array}$$

|

P(a)→Q(a)

P(a)

¬Q(a)

| |

¬P(a) Q(a)

P(a) P(a)

¬Q(a) ¬Q(a)

♦ ♦

Il tableau predicativo così ottenuto è chiuso.

Come accennato, il procedimento necessita però di alcune precisazioni molto importanti: anticipiamo le due più importanti:

- *la scelta di un elemento particolare (istanziazione) nel caso di una formula con un quantificatore universale deve poter essere ripetuta più volte;*

- *la scelta di un elemento particolare nel caso di più formule con quantificatori esistenziali deve portare a più elementi diversi.*

Il seguente esempio renderà più chiara l'ultima precisazione sulle regole predicative per la costruzione dei tableaux.

(Contro)esempio. Consideriamo le ipotesi del teorema di Cauchy:

$$\begin{cases} f \ \textit{continua in } [a;\, b] \\ f \ \textit{derivabile in }]a;\, b[\\ g \ \textit{continua in } [a;\, b] \\ g \ \textit{derivabile in }]a;\, b[\\ \forall x \in \,]a;\, b[,\ g'(x) \neq 0 \end{cases}$$

In tale situazione, le ipotesi del teorema di Lagrange sono rispettate sia dalla funzione f che dalla g; potremmo quindi scrivere:

$$\exists c \in \,]a;\, b[:\ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\exists c \in \,]a;\, b[:\ g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

e, dividendo membro a membro, finiremmo con l'ottenere:

$$\exists c \in]a; b[: \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

cioè la tesi del teorema di Cauchy! La "dimostrazione" riportata *non* sarebbe però accettabile: una scrittura didatticamente efficace (a rigore, una scrittura è corretta anche se una variabile è quantificata più volte) di quanto ottenuto applicando due *distinte* volte il teorema di Lagrange dovrebbe essere, per quanto riguarda l'azione dei due quantificatori esistenziali:

$$\exists c \in]a; b[: f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$\exists d \in]a; b[: g'(d) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$$

(con *c* e *d* non necessariamente uguali) e da ciò *non* può direttamente essere ottenuta la tesi del teorema di Cauchy (che afferma l'esistenza "*di un (singolo) punto c* dell'intervallo] *a*; *b*[tale che...").

Il prossimo esempio riprenderà la situazione ora rilevata.

15.2. Regole per la costruzione di un tableau predicativo

Come sopra osservato, tutte le regole introdotte nella sezione precedente con riferimento ai tableaux proposizionali possono essere nuovamente applicate per la costruzione di tableaux predicativi. Ad esse vanno aggiunte le seguenti nuove regole:

- se una formula di un ramo di un tableau è del tipo $\forall x\mathrm{A}(x)$ oppure $\neg\exists x\mathrm{B}(x)$, aggiungiamo un nuovo nodo:

$$\begin{array}{c} \forall x\mathrm{A}(x) \\ \downarrow \\ | \\ \forall x\mathrm{A}(x) \\ \mathrm{A}(a) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg\exists x\mathrm{B}(x) \\ \downarrow \\ | \\ \neg\exists x\mathrm{B}(x) \\ \neg\mathrm{B}(a) \end{array}$$

- se una formula di un ramo di un tableau è del tipo $\exists x\mathrm{A}(x)$ oppure $\neg\forall x\mathrm{B}(x)$, aggiungiamo un nuovo nodo:

$$
\begin{array}{c}
\exists x\mathrm{A}(x) \\
\downarrow \\
| \\
\mathrm{A}(a)
\end{array}
\qquad\qquad\qquad\qquad
\begin{array}{c}
\neg\forall x\mathrm{B}(x) \\
\downarrow \\
| \\
\neg\mathrm{B}(a)
\end{array}
$$

A differenza dalla seconda (talvolta detta δ-regola) e da quelle relative ai tableaux proposizionali, la prima regola (detta γ-regola) aggiunge una formula più semplice ma *mantiene anche la formula quantificata* (nell'esempio del paragrafo precedente non abbiamo fatto ciò, ma in tale caso, come sopra segnalato, questa omissione non è stata tale da pregiudicare la chiusura del tableau). Ciò accade per sottolineare l'essenziale possibilità di ripetere l'applicazione della formula quantificata (universalmente) anche a nuove costanti che vengano introdotte successivamente.

Questa osservazione ha un'importante conseguenza: mentre nell'ambito della logica degli enunciati il metodo dei tableaux è di tipo *decisionale* (il tableau viene comunque ad essere *finito*, chiuso o non chiuso, e quindi fornisce una risposta sul fatto che la negazione della formula esaminata sia o non sia una tautologia), in ambito predicativo esso può portare a tableaux infiniti (e quindi può *non* portare a tale risposta: riprenderemo questa considerazione nel paragrafo 15.4).

Inoltre ripetiamo ancora quanto anticipato a proposito della presenza di più formule quantificate esistenzialmente: la scelta di un elemento particolare in tale caso deve portare *a più elementi diversi.* Illustriamo questa osservazione con il seguente esempio.

(Contro)esempio. Consideriamo (criticamente!) il seguente tableau, riferito ad una formula con due quantificatori esistenziali:

$$
\begin{array}{c}
[\exists x\mathrm{P}(x)]\wedge\{\exists x[\neg\mathrm{P}(x)]\} \\
| \\
\exists x\mathrm{P}(x) \\
\exists x[\neg\mathrm{P}(x)] \\
| \\
\mathrm{P}(a) \\
\neg\mathrm{P}(a)
\end{array}
$$

Potremmo essere tentati di affermare la chiusura di tale tableau, ma sarebbe una conclusione *errata*: l'esistenza di una x per cui è $\mathrm{P}(x)$ e di una x per cui è $\neg\mathrm{P}(x)$ non implica che tali x siano lo stesso elemento (a meno che alla x non sia imposto di variare in un dominio costituito da un solo elemento). Pertanto l'ultimo nodo avrebbe dovuto essere:

$$
\begin{array}{c}
|\\
\mathrm{P}(a)\\
\neg\mathrm{P}(b)
\end{array}
$$

e in questo caso il tableau non può essere considerato chiuso.

Consideriamo alcuni esempi di tableau predicativi.

Esempio. Costruiamo il tableau predicativo per la negazione della formula $[\forall x\mathrm{P}(x)\vee\forall x\mathrm{Q}(x)]\rightarrow\forall x[\mathrm{P}(x)\vee\mathrm{Q}(x)]$:

$$
\begin{array}{c}
\neg\{[\forall x\mathrm{P}(x)\vee\forall x\mathrm{Q}(x)]\rightarrow\forall x[\mathrm{P}(x)\vee\mathrm{Q}(x)]\}\\
|\\
\forall x\mathrm{P}(x)\vee\forall x\mathrm{Q}(x)\\
\neg\{\forall x[\mathrm{P}(x)\vee\mathrm{Q}(x)]\}\\
\begin{array}{cc}
| & |\\
\forall x\mathrm{P}(x) & \forall x\mathrm{Q}(x)\\
\neg\{\forall x[\mathrm{P}(x)\vee\mathrm{Q}(x)]\} & \neg\{\forall x[\mathrm{P}(x)\vee\mathrm{Q}(x)]\}\\
| & |\\
\forall x\mathrm{P}(x) & \forall x\mathrm{Q}(x)\\
\neg[\mathrm{P}(a)\vee\mathrm{Q}(a)] & \neg[\mathrm{P}(a)\vee\mathrm{Q}(a)]\\
| & |\\
\forall x\mathrm{P}(x) & \forall x\mathrm{Q}(x)\\
\neg\mathrm{P}(a) & \neg\mathrm{P}(a)\\
\neg\mathrm{Q}(a) & \neg\mathrm{Q}(a)\\
| & |\\
\mathrm{P}(a) & \mathrm{Q}(a)\\
\forall x\mathrm{P}(x) & \forall x\mathrm{Q}(x)\\
\neg\mathrm{P}(a) & \neg\mathrm{P}(a)\\
\neg\mathrm{Q}(a) & \neg\mathrm{Q}(a)\\
\blacklozenge & \blacklozenge
\end{array}
\end{array}
$$

(Si osservi che sono state riscritte le formule del tipo $\forall x\mathrm{R}(x)$ e $\neg\exists x\mathrm{R}(x)$, come previsto dalle γ-regole applicate).

Il tableau predicativo così ottenuto è *chiuso.*

Dunque la formula:

$$[\forall x\mathrm{P}(x)\vee\forall x\mathrm{Q}(x)]\rightarrow\forall x[\mathrm{P}(x)\vee\mathrm{Q}(x)]$$

è valida.

15.3. Esempi di formule valide nel calcolo dei predicati

Le formule seguenti sono valide nel calcolo dei predicati e possono essere verificate, per esercizio, con il metodo dei tableaux predicativi:

$\forall x\mathrm{P}(x) \leftrightarrow \neg\exists x\neg\mathrm{P}(x)$
$\exists x\mathrm{P}(x) \leftrightarrow \neg\forall x\neg\mathrm{P}(x)$
$\forall x\mathrm{P}(x) \rightarrow \exists x\mathrm{P}(x)$

$\exists x\forall y\mathrm{P}(x; y) \rightarrow \forall y\exists x\mathrm{P}(x; y)$
$\forall x\forall y\mathrm{P}(x; y) \leftrightarrow \forall y\forall x\mathrm{P}(x; y)$
$\exists x\exists y\mathrm{P}(x; y) \leftrightarrow \exists y\exists x\mathrm{P}(x; y)$

$\exists x[\mathrm{P}(x)\vee\mathrm{Q}(x)] \leftrightarrow [\exists x\mathrm{P}(x)\vee\exists x\mathrm{Q}(x)]$
$\forall x[\mathrm{P}(x)\wedge\mathrm{Q}(x)] \leftrightarrow [\forall x\mathrm{P}(x)\wedge\forall x\mathrm{Q}(x)]$

$[\forall x\mathrm{P}(x)\vee\forall x\mathrm{Q}(x)] \rightarrow \forall x[\mathrm{P}(x)\vee\mathrm{Q}(x)]$
$\exists x[\mathrm{P}(x)\wedge\mathrm{Q}(x)] \rightarrow [\exists x\mathrm{P}(x)\wedge\exists x\mathrm{Q}(x)]$

$\forall x[\mathrm{P}(x)\leftrightarrow\mathrm{Q}(x)] \rightarrow [\forall x\mathrm{P}(x)\leftrightarrow\forall x\mathrm{Q}(x)]$
$\forall x[\mathrm{P}(x)\leftrightarrow\mathrm{Q}(x)] \rightarrow [\exists x\mathrm{P}(x)\leftrightarrow\exists x\mathrm{Q}(x)]$

$[\exists x\mathrm{P}(x)\vee\mathrm{Q}] \leftrightarrow \exists x[\mathrm{P}(x)\vee\mathrm{Q}]$
$[\forall x\mathrm{P}(x)\vee\mathrm{Q}] \leftrightarrow \forall x[\mathrm{P}(x)\vee\mathrm{Q}]$
$[\exists x\mathrm{P}(x)\wedge\mathrm{Q}] \leftrightarrow \exists x[\mathrm{P}(x)\wedge\mathrm{Q}]$
$[\forall x\mathrm{P}(x)\wedge\mathrm{Q}] \leftrightarrow \forall x[\mathrm{P}(x)\wedge\mathrm{Q}]$

$\forall x[\mathrm{P}\rightarrow\mathrm{Q}(x)] \leftrightarrow [\mathrm{P}\rightarrow\forall x\mathrm{Q}(x)]$
$\forall x[\mathrm{P}(x)\rightarrow\mathrm{Q}] \leftrightarrow [\exists x\mathrm{P}(x)\rightarrow\mathrm{Q}]$

$\exists x[\mathrm{P}(x)\rightarrow\mathrm{Q}(x)] \rightarrow [\forall x\mathrm{P}(x)\rightarrow\exists x\mathrm{Q}(x)]$
$[\exists x\mathrm{P}(x)\rightarrow\forall x\mathrm{Q}(x)] \rightarrow \forall x[\mathrm{P}(x)\rightarrow\mathrm{Q}(x)]$

$\forall x[\mathrm{P}(x)\rightarrow\mathrm{Q}(x)] \rightarrow [\forall x\mathrm{P}(x)\rightarrow\forall x\mathrm{Q}(x)]$
$\forall x[\mathrm{P}(x)\rightarrow\mathrm{Q}(x)] \rightarrow [\exists x\mathrm{P}(x)\rightarrow\exists x\mathrm{Q}(x)]$
$\forall x[\mathrm{P}(x)\rightarrow\mathrm{Q}(x)] \rightarrow [\forall x\mathrm{P}(x)\rightarrow\exists x\mathrm{Q}(x)]$

Esempio. Costruiamo il tableau predicativo per la negazione della formula $\forall x[\mathrm{P}(x)\leftrightarrow\mathrm{Q}(x)] \rightarrow [\exists x\mathrm{P}(x)\leftrightarrow\exists x\mathrm{Q}(x)]$:

$$\neg\{\forall x[P(x)\leftrightarrow Q(x)] \rightarrow [\exists xP(x)\leftrightarrow\exists xQ(x)]\}$$

$$\begin{array}{c} | \\ \forall x[P(x)\leftrightarrow Q(x)] \\ \neg[\exists xP(x)\leftrightarrow\exists xQ(x)] \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} | & | \\ \forall x[P(x)\leftrightarrow Q(x)] & \forall x[P(x)\leftrightarrow Q(x)] \\ \exists xP(x) & \neg\exists xP(x) \\ \neg\exists xQ(x) & \exists xQ(x) \\ | & | \\ \forall x[P(x)\leftrightarrow Q(x)] & \forall x[P(x)\leftrightarrow Q(x)] \\ \neg\exists xQ(x) & \neg\exists xP(x) \\ \neg Q(a) & \neg P(a) \\ | & | \\ \forall x[P(x)\leftrightarrow Q(x)] & \forall x[P(x)\leftrightarrow Q(x)] \\ P(a)\leftrightarrow Q(a) & P(a)\leftrightarrow Q(a) \\ \neg\exists xQ(x) & \neg\exists xP(x) \\ \neg Q(a) & \neg P(a) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} | & | & | & | \\ \forall x[P(x)\leftrightarrow Q(x)] & \forall x[P(x)\leftrightarrow Q(x)] & \forall x[P(x)\leftrightarrow Q(x)] & \forall x[P(x)\leftrightarrow Q(x)] \\ P(a) & \neg P(a) & P(a) & \neg P(a) \\ Q(a) & \neg Q(a) & Q(a) & \neg Q(a) \\ \neg\exists xQ(x) & \neg\exists xP(x) & \neg\exists xQ(x) & \neg\exists xP(x) \\ \neg Q(a) & \neg P(a) & \neg Q(a) & \neg P(a) \\ \blacklozenge & | & \blacklozenge & | \\ & \forall x[P(x)\leftrightarrow Q(x)] & & \forall x[P(x)\leftrightarrow Q(x)] \\ & \neg P(a) & & \neg P(a) \\ & \neg Q(a) & & \neg Q(a) \\ & \neg\exists xP(x) & & \neg\exists xP(x) \\ & \neg P(a) & & \neg P(a) \\ & P(a) & & Q(a) \\ & \blacklozenge & & \blacklozenge \end{array}$$

(Si osservi che sono state riscritte le formule del tipo $\forall x R(x)$ e $\neg\exists x R(x)$, come previsto dalle γ-regole applicate). Il tableau predicativo così ottenuto è *chiuso*. Ciò ci consente di concludere che la formula:

$$\forall x[P(x)\leftrightarrow Q(x)] \rightarrow [\exists xP(x)\leftrightarrow\exists xQ(x)]$$

è valida.

Esempio. Consideriamo lo schema logico sul quale si basa l'*abduzione*:

$$\{\forall x[C(x)\to E(x)]\wedge E(a)\} \to C(a)$$

Sappiamo che una causa $C(x)$ porta sempre all'effetto $E(x)$ (ad esempio: ogni paziente x affetto dalla malattia C presenta il sintomo E) e l'effetto E si presenta per il soggetto a (ad esempio: nel paziente a rileviamo il sintomo E): spesso siamo tentati di ipotizzare la causa C agente nel caso del soggetto a (cioè che il paziente a sia affetto dalla malattia C).

Analizziamo con il metodo dei tableaux la formula logica sopra scritta e costruiamo il tableau della sua negazione.

$$\neg\{\{\forall x[C(x)\to E(x)]\wedge E(a)\} \to C(a)\}$$
$$|$$
$$\forall x[C(x)\to E(x)]\wedge E(a)$$
$$\neg C(a)$$
$$|$$
$$\forall x[C(x)\to E(x)]$$
$$E(a)$$
$$\neg C(a)$$
$$|$$
$$C(a)\to E(a)$$
$$E(a)$$
$$\neg C(a)$$

$\neg C(a)$	$E(a)$
$E(a)$	$E(a)$
$\neg C(a)$	$\neg C(a)$

Il tableau non è chiuso, dunque la formula esaminata non è una formula valida: in entrambe le foglie (a parte le ripetizioni) abbiamo l'insieme $\{E(a); \neg C(a)\}$, che può essere riferito ad un elemento a per cui si rileva l'effetto E ma al quale non sia riferibile la causa C, situazione... non assurda.

Ciò non significa ovviamente che la modalità di ragionamento considerata (l'*abduzione*) sia da considerare inaccettabile; una sua valutazione si basa su considerazioni ad esempio probabilistiche, che trascendono la logica bivalente: al di là dell'alternativa "vero" -"falso" c'è la valutazione degli stati "incerto ma (più o meno) probabile".

Esempio. Un'altra formula generalmente non valida è la seguente:

$\{\exists x[C(x)\rightarrow E(x)] \wedge C(a)\} \rightarrow E(a)$

Sappiamo che talvolta (in almeno un caso) una causa C(x) porta all'effetto E(x) (ad esempio: può accadere che in un paziente x affetto dalla malattia C si presenti la complicazione E) e che la causa C agisce nel caso del soggetto a (ad esempio: il paziente a è affetto dalla malattia C): possiamo essere tentati di concludere che l'effetto E si presenterà per il soggetto a (cioè che il paziente a sarà colpito dalla complicazione E).

Analizziamo con il metodo dei tableaux la formula logica sopra scritta e costruiamo il tableau della sua negazione.

$$\neg\{\{\exists x[C(x)\rightarrow E(x)] \wedge C(a)\} \rightarrow E(a)\}$$
$$|$$
$$\exists x[C(x)\rightarrow E(x)] \wedge C(a)$$
$$\neg E(a)$$
$$|$$
$$\exists x[C(x)\rightarrow E(x)]$$
$$C(a)$$
$$\neg E(a)$$
$$|$$
$$C(b)\rightarrow E(b)$$
$$C(a)$$
$$\neg E(a)$$

$\neg C(b)$	$E(b)$
$C(a)$	$C(a)$
$\neg E(a)$	$\neg E(a)$

Questo tableau non è chiuso, dunque la formula esaminata non è una formula valida: si noti che l'istanziazione della formula quantificata esistenzialmente ha dovuto essere condotta con riferimento ad una costante (b) diversa dalla costante già presente (a). Il tableau risulterebbe chiuso soltanto se all'insieme in cui consideriamo x appartenesse un solo elemento.

15.4. Correttezza e completezza del metodo dei tableaux

Si dice che da una teoria Φ si deduce la formula F col metodo dei tableaux quando esiste un tableau chiuso per $\Phi\cup(\neg F)$. Si scrive allora:

$$\Phi \vdash_T F$$

oppure (se non ci sono pericoli di ambiguità):

$$\Phi \vdash F$$

Dimostriamo innanzitutto il risultato seguente:

Teorema della correttezza del metodo deduttivo dei tableaux.

$$\Phi \vdash_T F \quad \Rightarrow \quad \Phi \models F$$

Dimostrazione. Se esiste un Φ-tableau chiuso, Φ è insoddisfacibile; quindi se $\Phi \vdash_T F$ significa che $\Phi \cup (\neg F)$ è insoddisfacibile e dunque $\Phi \models F$. cvd

Una teoria Φ viene detta *tableau-consistente* se non esistono Φ-tableaux chiusi.

Molto importante è infine il risultato seguente, grazie al quale è possibile *identificare la relazione di conseguenza logica e quella di tableau-deducibilità*. Prima di enunciare il teorema dobbiamo però fare una precisazione: quanto diremo dovrà essere riferito ad una particolare costruzione dei tableaux, detta *sistematica*. Infatti abbiamo anticipato che la costruzione di un tableau non è sempre un procedimento con una conclusione. Per evitare tale inconveniente è stato messo a punto un procedimento che assicura un'applicazione sistematica delle regole e la conclusione della costruzione del tableau, che risulterà o chiuso o non chiuso (non illustriamo dettagliatamente le caratteristiche di tale procedimento di costruzione; rimandiamo a: Ben-Ari, 1998, p. 115).

Teorema della completezza del metodo deduttivo dei tableaux. Ogni teoria Φ che sia tableau-consistente è soddisfacibile, cioè:

$$\Phi \models F \quad \Rightarrow \quad \Phi \vdash_T F$$

dove ci riferiamo alla costruzione sistematica dei tableaux.

Dunque, considerando i due ultimi risultati, possiamo scrivere:

$$\Phi \models F \Leftrightarrow \Phi \vdash_T F$$

(dove il riferimento è ancora alla costruzione sistematica dei tableaux).

16. I SISTEMI DI GENTZEN E DI HILBERT E IL CALCOLO DEI PREDICATI

16.1. Sistema di Gentzen per il calcolo dei predicati

La deduzione nel sistema di Gentzen può essere estesa al calcolo dei predicati. Alle regole proposizionali si aggiungono le nuove regole per i quantificatori esistenziali e universali (quelle della prima riga possono essere denominate γ-regole, quelle della seconda δ-regole):

$$\frac{U \cup \{\exists x A(x), A(a)\}}{U \cup \{\exists x A(x)\}} \qquad \frac{U \cup \{\neg\forall x A(x), \neg A(a)\}}{U \cup \{\neg\forall x A(x)\}}$$

$$\frac{U \cup \{A(a)\}}{U \cup \{\forall x A(x)\}} \qquad \frac{U \cup \{\neg A(a)\}}{U \cup \{\neg\exists x A(x)\}}$$

Osserviamo che le δ-regole possono essere applicate solamente a condizione che la costante *a* non appaia in U (ciò è richiesto per non imporre restrizioni sull'interpretazione della co stante *a*).

Illustriamo l'applicazione del metodo mediante l'esempio seguente (che riprendiamo da: Ben-Ari, 1998, p. 121).

Esempio. Deduciamo: $\exists x\forall y P(x, y) \rightarrow \forall y\exists x P(x, y)$.

$$\neg\forall y P(a, y),\ \neg P(a, b),\ \neg P(a, a),\ \exists x P(x, b),\ P(a, b)$$
$$|$$
$$\neg\forall y P(a, y),\ \neg P(a, a),\ \exists x P(x, b),\ P(a, b)$$
$$|$$
$$\neg\forall y P(a, y),\ \exists x P(x, b),\ P(a, b)$$
$$|$$
$$\neg\forall y P(a, y),\ \exists x P(x, b)$$
$$|$$
$$\neg\forall y P(a, y),\ \forall y\exists x P(x, y)$$
$$|$$
$$\neg\exists x\forall y P(x, y),\ \forall y\exists x P(x, y)$$
$$|$$
$$\exists x\forall y P(x, y) \rightarrow \forall y\exists x P(x, y)$$

16.2. Correttezza e completezza del sistema di Gentzen

Esiste una dimostrazione di Gentzen di U se e solo se è ottenibile un tableau semantico chiuso per l'insieme dei complementi delle formule di U. Si può dunque dimostrare che U è valida se e solo se c'è una sua dimostrazione nel sistema di Gentzen (possiamo ad esempio esprimere ciò scrivendo: $\vdash_G$ U); ciò significa che il sistema di Gentzen è corretto e completo:

Teorema della correttezza del metodo deduttivo di Gentzen.

$$\vdash_G \mathrm{U} \quad \Rightarrow \quad \models \mathrm{U}$$

Teorema della completezza del metodo deduttivo di Gentzen.

$$\models \mathrm{U} \quad \Rightarrow \quad \vdash_G \mathrm{U}$$

e dunque, considerando contemporaneamente i due ultimi risultati:

$$\models \mathrm{U} \;\Leftrightarrow\; \vdash_G \mathrm{U}$$

16.3. Cenni sul sistema di Hilbert per il calcolo dei predicati

Anche il sistema di Hilbert, che nella sezione precedente era stato introdotto con riferimento ai soli enunciati non quantificati, può essere esteso al calcolo dei predicati. Ci limiteremo a sviluppare la questione facendo riferimento al quantificatore universale; per quanto riguarda il quantificatore esistenziale è infatti sufficiente ricordare che: $\exists x\mathrm{A}(x) \leftrightarrow \neg\forall x\neg\mathrm{A}(x)$.

I nuovi assiomi (o schemi di assiomi) sono:

$\vdash \forall x\mathrm{A}(x)\rightarrow\mathrm{A}(a)$ Assioma 4

$\vdash \forall x[\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B}(x)]\rightarrow[\mathrm{A}\rightarrow\forall x\mathrm{B}(x)]$
con x che non compare libera in A Assioma 5

(con il simbolo $\vdash$ esprimiamo come al solito la dimostrabilità).

La nuova *regola di inferenza* è detta di *generalizzazione*:

$$\frac{\vdash \mathrm{A}(a)}{\vdash \forall x\mathrm{A}(x)}$$

Introduciamo la nuova *regola di deduzione*: per un insieme di formule U ed una coppia di formule A, B:

$$\frac{U \cup \{A\} \vdash B}{U \vdash A \rightarrow B}$$

purché nella dimostrazione di $U \cup \{A\} \vdash B$ non sia applicata la regola di generalizzazione ad una costante che appare in A.

Si prova (*teorema di deduzione*) che la regola di deduzione è una regola derivata corretta, sempre nell'ipotesi che nella dimostrazione di $U \cup \{A\} \vdash B$ non sia applicata la regola di generalizzazione ad una costante che appare in A.

Illustriamo l'applicazione del metodo mediante l'esempio seguente (che riprendiamo da: Ben-Ari, 1998, p. 124).

Esempio. Deduciamo: $\vdash \forall x[P(x)\rightarrow Q(x)] \rightarrow [\forall xP(x)\rightarrow\forall xQ(x)]$.

1.	$\forall x[P(x)\rightarrow Q(x)], \forall xP(x) \vdash \forall xP(x)$	Ipotesi
2.	$\forall x[P(x)\rightarrow Q(x)], \forall xP(x) \vdash P(a)$	Assioma 4
3.	$\forall x[P(x)\rightarrow Q(x)], \forall xP(x) \vdash \forall x[P(x)\rightarrow Q(x)]$	Ipotesi
4.	$\forall x[P(x)\rightarrow Q(x)], \forall xP(x) \vdash P(a)\rightarrow Q(x)$	Assioma 4

A questo punto possiamo applicare il metodo in ambito proposizionale ed ottenere 5 (lasciamo al lettore il compito di esplicitare il procedimento per esercizio):

5.	$\forall x[P(x)\rightarrow Q(x)], \forall xP(x) \vdash Q(a)$	(da 2 e da 4)

La deduzione si conclude nei passi seguenti:

6.	$\forall x[P(x)\rightarrow Q(x)], \forall xP(x) \vdash \forall xQ(x)$	Generalizzazione 5
7.	$\forall x[P(x)\rightarrow Q(x)] \vdash \forall xP(x)\rightarrow\forall xQ(x)$	Deduzione
8.	$\vdash \forall x[P(x)\rightarrow Q(x)] \rightarrow [\forall xP(x)\rightarrow\forall xQ(x)]$	Deduzione

Quanto provato nell'esempio precedente costituisce una nuova tecnica (spesso denominata ancora "generalizzazione") che riassumiamo nella regola:

$$\frac{\vdash A(x)\rightarrow B(x)}{\vdash \forall xA(x)\rightarrow\forall xB(x)}$$

16.4. Correttezza e completezza del sistema di Hilbert

Si può dimostrare che A è valida se e solo se c'è una sua dimostrazione nel sistema di Hilbert (possiamo ad esempio esprimere ciò scrivendo: $\vdash_H$ A); ciò significa che il sistema di Hilbert è corretto e completo, come esprimono i teoremi seguenti:

Teorema della correttezza del metodo deduttivo di Hilbert.

$$\vdash_H A \quad \Rightarrow \quad \models A$$

Teorema della completezza del metodo deduttivo di Hilbert.

$$\models A \quad \Rightarrow \quad \vdash_H A$$

Dunque, considerando contemporaneamente i due ultimi risultati:

$$\models A \;\Leftrightarrow\; \vdash_H A$$

Esercizi sul Capitolo 4

4.1. Dire, giustificando la risposta, se $\exists x Q(x) \wedge \exists x [\neg Q(x)]$ è insoddisfacibile.

4.2. Dire, giustificando adeguatamente la risposta, se è una tautologia: $\{\forall x[\neg P(x)] \vee \forall x[\neg Q(x)]\} \rightarrow \forall x\{[\neg P(x)] \vee [\neg Q(x)]\}$.

Soluzioni degli esercizi sul Capitolo 4

4.1. Non è insoddisfacibile: si può ad esempio costruire il suo tableau, che non risulta chiuso. Più semplicemente, si può notare che l'esistenza di una x per cui è $Q(x)$ e l'esistenza di una x per cui è $\neg Q(x)$ non implicano, in generale, che tale x sia la stessa (nel qual caso avremmo una contraddizione).

4.2. Si può procedere con il metodo dei tableaux; ricordiamo che nel secondo esempio del paragrafo 15.2 è stato costruito il tableau di $[\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)] \rightarrow \forall x [P(x) \vee Q(x)]$, che risulta chiuso.