V

Procedimenti di risoluzione

17. FORME NORMALI CONGIUNTIVE E RISOLUZIONE

17.1. Forme normali congiuntive

Lo sviluppo di mezzi automatici di elaborazione di dati ha indicato l'opportunità di mettere a punto procedure di meccanizzazione della logica (ci baseremo su quanto proposto da J. A. Robinson nel 1965 e seguiremo: Ben-Ari, 1998). Svilupperemo la questione facendo riferimento al calcolo degli enunciati.

Inizieremo con il rilevare che ogni formula del calcolo degli enunciati può essere trasformata in una formula equivalente in una forma particolare, detta forma normale congiuntiva, che risulterà molto utile per l'impostazione di un procedimento risolutivo.

Definizione. Una formula è in *forma normale congiuntiva* se è costituita da una congiunzione di disgiunzioni di enunciati atomici (eventualmente negati).

Esempio. La formula:

$$[P\lor Q\lor(\neg Q)]\land[(\neg P)\lor(\neg Q)\lor R]$$

è in forma normale congiuntiva.

(Contro)esempio. La formula:

$$P\lor[Q\land(P\to R)]$$

non è in forma normale congiuntiva. Essa può però essere trasformata in una formula in forma normale congiuntiva ricordando che:

$$A\lor(B\land C) \quad \text{equivale a} \quad (A\lor B)\land(A\lor C)$$

$A \rightarrow B$ equivale a $(\neg A) \vee B$

Dunque la formula data può essere così riscritta:

$(P \vee Q) \wedge [P \vee (P \rightarrow R)]$
$(P \vee Q) \wedge [P \vee (\neg P) \vee R]$

e quest'ultima formula è in forma normale congiuntiva.

Osservazione. Si può dimostrare che un enunciato in forma normale congiuntiva è una tautologia se e solo se in ogni blocco di disgiunzioni è presente (almeno) un enunciato con la sua negazione. A volte possono essere considerati anche enunciati in *forma normale disgiuntiva*, costituiti da una disgiunzione di congiunzioni di enunciati atomici (eventualmente negati). Si può dimostrare che un enunciato in forma normale disgiuntiva è insoddisfacibile se e solo se in ogni blocco di congiunzioni è presente (almeno) un enunciato con la sua negazione. Nel presente capitolo ci occuperemo però solamente di enunciati in forma normale congiuntiva.

Sarà essenziale, per rendere possibile l'applicazione del metodo che illustreremo, che le formule di volta in volta considerate siano poste in forma normale congiuntiva. Ciò è possibile applicando la procedura seguente:

- si scriva innanzitutto la formula data eliminando i connettivi presenti a parte $\neg$, $\wedge$, $\vee$ (si utilizzino le equivalenze indicate nel paragrafo 10.4);
- si spostino tutte le negazioni che operano su parentesi all'interno di tali parentesi utilizzando le leggi di De Morgan;
- eliminare le eventuali doppie negazioni;
- eliminare infine eventuali congiunzioni presenti all'interno delle parentesi ricordando che:

  $A \vee (B \wedge C)$ equivale a $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
  $(A \wedge B) \vee C$ equivale a $(A \vee C) \wedge (B \vee C)$ (leggi distributive)

- eliminare eventuali membri doppi ricordando che:

  $A \wedge A$ equivale a A
  $A \vee A$ equivale a A

Indicheremo con il termine *clausola* un insieme di letterali; una clausola costituita da un solo letterale si dice *unitaria* una formula (in forma normale congiuntiva) *in forma clausale* è scritta come un insieme di clausole.

I letterali (enunciati atomici) di una clausola si scrivono successivamente, senza alcun simbolo, e le negazioni si indicano sottolineando il letterale, come nell'esempio seguente.

Esempio. La formula in forma normale congiuntiva:

$$[P \lor Q \lor (\neg Q)] \land [(\neg P) \lor (\neg Q) \lor R]$$

può esprimersi in forma clausale S nel modo seguente:

$$S = \{PQ\underline{Q}, \underline{PQ}R\}$$

Se l è un letterale, indichiamo con l^c il suo complemento (quindi se l è P, l^c è $\underline{P}$ e viceversa).

17.2. Risoluzione

Considerate le due formule in forma clausale S e T, scriveremo $S \approx T$ quando S è soddisfacibile se e soltanto se T è soddisfacibile.

Assegnata una formula in forma clausale, procederemo ora a modificarla senza alterare la sua soddisfacibilità. In particolare, si dimostra che valgono i risultati seguenti:

- se un letterale l appare in S e l^c non appare in S, allora detta T la formula in forma clausale ottenuta da S cancellando ogni clausola che contiene l, risulta $S \approx T$.

Esempio. Nel caso seguente risulta $S \approx T$:

$$S = \{\underline{R}Q, PQR, QR\}$$
$$T = \{\underline{R}Q, QR\}$$

Si noti infatti che la S contiene P ma non $\underline{P}$.

- se $\{l\}$ è una clausola unitaria di S, allora detta T la formula in forma clausale ottenuta da S cancellando ogni clausola che contiene l e inoltre cancellando l^c all'interno di ogni clausola rimanente, risulta $S \approx T$.

Esempio. Nel caso seguente risulta S ≈ T:

$$S = \{\underline{R}Q, PQ\underline{R}, \underline{P}Q, R\}$$
$$T = \{Q, PQ, \underline{P}Q\}$$

- se ad una stessa clausola C appartengono sia l che l^c, allora detta T la formula in forma clausale ottenuta da S cancellando C, risulta S ≈ T.

Esempio. Nel caso seguente risulta S ≈ T:

$$S = \{\underline{R}P, RP\underline{P}Q, QR\}$$
$$T = \{RP, QR\}$$

- se le clausole C e D appartengono a S e $C \subseteq D$, allora detta T la formula in forma clausale ottenuta da S cancellando D, risulta S ≈ T (cioè in questo caso possiamo cancellare la clausola “più grande”).

Esempio. Nel caso seguente risulta S ≈ T:

$$S = \{\underline{P}Q, \underline{P}QR, PR\}$$
$$T = \{\underline{P}Q, PR\}$$

Possiamo ora descrivere la procedura di risoluzione.

Data la formula in forma clausale S, siano C, D due sue clausole tali che $l \in C$ e $l^c \in D$ (esse vengono dette *clausole contrastanti* sui letterali complementari l e l^c); allora diremo *risolvente* di C, D la clausola:

$$\mathrm{Res}(C, D) = (C - \{l\}) \cup (C - \{l^c\})$$

C e D sono talvolta dette *genitrici* di Res(C, D).

Si dimostra che la risolvente Res(C, D) è soddisfacibile se e solo se le genitrici C e D sono soddisfacibili.

Procedura risolutiva. Sia S una data formula in forma clausale. Dovremo costruire una sequenza S(n) di formule in forma clausale, partendo da S(0) = S, costruendo ripetutamente la risolvente di due clausole contrastanti.

Consideriamo la formula S(i); scegliamo due clausole contrastanti C e D di S(i) e consideriamo la risolvente Res(C, D). Costruiamo allora:

$S(i+1) = S(i) \cup \mathrm{Res}(C, D)$

Se Res(C, D) è la clausola vuota, che indicheremo con {}, allora la procedura termina e *S è insoddisfacibile.*
Se $S(i+1) = S(i)$ per ogni scelta di clausole contrastanti, allora la procedura termina e *S è soddisfacibile*.

Osserviamo che la procedura risolutiva ora presentata è, propriamente, una procedura di refutazione: essa può infatti essere applicata per dimostrare che una formula A è una tautologia grazie al fatto che l'insoddisfacibilità di ¬A corrisponde alla validità di A. Applichiamo il metodo all'esempio seguente (tratto da: Ben-Ari, 1998):

Esempio. Costruiamo la risoluzione di:

$S = \{P, \underline{P}Q, \underline{R}, \underline{PQ}R\}$

Indichiamo con: $C(1) = \{P\}$
$C(2) = \{\underline{P}Q\}$
$C(3) = \{\underline{R}\}$
$C(4) = \{\underline{PQ}R\}$

Le clausole C(3) e C(4) sono contrastanti sui letterali complementari R e $\underline{R}$. La loro risolvente è:

$\mathrm{Res}[C(3), C(4)] = \{\underline{PQ}\}$

Quest'ultima clausola, che possiamo indicare con C(5), è contrastante con C(2) sui letterali complementari Q e $\underline{Q}$. La loro risolvente è:

$\mathrm{Res}[C(2), C(5)] = \{\underline{P}\}$

Infine quest'ultima clausola, che possiamo indicare con C(6), è contrastante con C(1) sui letterali complementari P e $\underline{P}$.
La loro risolvente è:

$\mathrm{Res}[C(1), C(6)] = \{\}$

Possiamo concludere che l'assegnata $S = \{P, \underline{P}Q, \underline{R}, \underline{PQ}R\}$ è insoddisfacibile (ci limitiamo a segnalare che la S ora considerata è la forma clausale di ¬A dove A è il secondo assioma dei sistemi di Hilbert).

17.3. Correttezza e completezza della risoluzione

Anche la procedura ora presentata è corretta e completa. Si possono infatti dimostrare i teoremi seguenti:

Teorema. Correttezza della risoluzione. Se dalla formula in forma clausale S viene derivata mediante la procedura di risoluzione la clausola insoddisfacibile { }, allora S è insoddisfacibile.

Teorema. Completezza della risoluzione. Se la formula in forma clausale S è insoddisfacibile, allora la clausola insoddisfacibile { } viene derivata mediante la procedura di risoluzione.

La procedura sopra presentata nel caso di formule proposizionali può essere estesa a formule predicative. Tale estensione risulta praticamente utile in quanto altri metodi applicabili al calcolo dei predicati, come ad esempio il metodo dei tableaux semantici, risultano di scarsa efficienza.

Una presentazione del problema della risoluzione nel caso di formule predicative esula però dagli scopi di questi appunti (per un approfondimento rinviamo a: Ben-Ari, 1998, pp. 131-135).

17.4. Quali prospettive?

Concludiamo riportando un'annotazione di A. Labella:

> "Quali prospettive? Quale l'attuale posizione della logica matemat ica? Naturalmente il problema è estremamente dibattuto ed in questo testo se ne vede soprattutto il ruolo che riguarda la teoria della dimostrazione automatica. Sicuramente non è l'unico caso di applicazione della logica matematica all'informatica.
>
> Forse il legame più profondo tra la logica, la matematica e l'informatica sta proprio nel concetto di calcolo, cioè di manipolazione simbolica. Nel calcolo sono da distinguersi diversi aspetti: la ricerca del simbolismo adatto, le regole e la velocità di esecuzione. (…)
>
> Un simbolismo sbagliato può portare costi enormi, l'elevata complessità oltre certi limiti impedisce del tutto la soluzione. La logica usa un linguaggio altamente simbolico ed è in buona parte ragionamento su

linguaggi simbolici, è quindi molto sensibile al problema della scelta del simbolismo.

Un discorso simile, se non ancora più stringente, riguarda le regole del calcolo. (…) La logica si presenta oggi come un sistema di regole, anzi, come diversi sistemi di regole, a seconda della particolare logica che consideriamo: quanto può ancora questo paradigma essere cambiato in modo significativo adattandosi alle esigenze di problemi diversi senza snaturarsi? Certamente in questi cambiamenti qualche invariante deve essere mantenuto: nel caso della logica si tratta del riferimento al ragionamento umano, in ossequio alle origini, oppure abbiamo una caratterizzazione puramente algebrico-matematica proprio per il fatto che si tratta di un calcolo, o altro ancora?

Nell'ultimo aspetto, quello della velocità, non solo ha grossa rilevanza la tecnologia, ma esso può influire sulla parte teorica in modo significativo perché può spostare il confine tra ciò che è effettivamente calcolabile e ciò che non lo è, ma anche suggerire congetture su teoremi da dimostrare, potendo permettere di controllare anche esempi abbastanza complessi. Perciò l'uso di particolari strumenti di calcolo può portare addirittura a modifiche di prospettiva teorica" (Ben-Ari, 1998, pp. XIV-XV).

Esercizi sul Capitolo 5

5.1. Dire, giustificando la risposta, se $[(\neg A)\vee C\vee A] \wedge [A\vee(\neg B)\vee(\neg D)\vee C] \wedge [(\neg D)\vee C\vee D]$ è soddisfacibile. Si tratta di una tautologia?

5.2. Dire, giustificando la risposta, se $[(\neg A)\vee C\vee A] \wedge [A\vee(\neg C)\vee(\neg B)\vee C] \wedge [(\neg D)\vee C\vee D]$ è soddisfacibile. Si tratta di una tautologia?

5.3. Dire, giustificando la risposta, se $[(\neg A)\wedge C\wedge A] \vee [A\wedge(\neg B)\wedge(\neg C)\wedge B] \vee [(\neg C)\wedge D\wedge C]$ è soddisfacibile. Si tratta di una tautologia?

5.4. Dire, giustificando la risposta, se $[(\neg A)\wedge C\wedge A] \vee [A\wedge(\neg C)\wedge(\neg B)\wedge C] \vee [(\neg A)\wedge B\wedge C]$ è soddisfacibile. Si tratta di una tautologia?

Risoluzione degli esercizi sul Capitolo 5

5.1. Si tratta di una forma normale congiuntiva; è soddisfacibile ma non è una tautologia.

5.2. Si tratta di una forma normale congiuntiva; è una tautologia (dunque è soddisfacibile).

5.3. Si tratta di una forma normale disgiuntiva; è insoddisfacibile (dunque non è una tautologia).

5.4. Si tratta di una forma normale disgiuntiva; è soddisfacibile ma non è una tautologia.

ESSAIS

DE

THEODICÉE

SUR

LA BONTE' DE DIEU, la liberté de l'Homme & l'origine du Mal.

Par Monſieur LEIBNITZ.

SECONDE EDITION.

TOME PREMIER.

A BRUXELLES,

Chez FRANÇOIS FOPPENS, au S. Eſprit.

M. DCC. XXXIV.

Il frontespizio della seconda edizione (Bruxelles, 1734) di *Essais de Theodicée* di G.W. Leibniz