Appendice A

Il sistema assiomatico di Zermelo per la teoria degli insiemi

Ernest Zermelo (1871-1953) rilevò che la presenza delle antinomie poteva essere collegata ad un'insufficiente definizione del concetto di insieme (ricordiamo che Cantor non richiedeva alcuna particolare restrizione: un insieme era semplicemente una qualsiasi collezione di enti del nostro pensiero). Per comprendere la proposta di assiomatizzazione di Zermelo è opportuno ritornare brevemente alla situazione della nozione di insieme alla fine del XIX secolo. Citiamo in proposito E. Casari:

> "Più di mezzo secolo di discussioni e sviluppi della teoria cantoriana ci permettono di indicare come caratteristiche del concetto cantoriano di insieme le seguenti proprietà:
> 1) La sua *esistenza* in corrispondenza ad *ogni molteplicità* di enti distinti caratterizzabili da una condizione.
> 2) La sua *determinazione* completa da parte degli elementi della molteplicità corrispondente.
> 3) La sua *sostanzialità* nel duplice aspetto di:
> a) *individualità* e cioè capacità al pari di ogni altra sostanza individuale a godere di attributi, ad essere, cioè, elemento di molteplicità;
> b) *assolutezza* e cioè indipendenza dal linguaggio nel senso che un insieme e le sue proprietà sono indipendenti da ogni nostra possibilità linguistico-teoretica di caratterizzarli" (Casari, 1964, p. 21).

Una simile concezione di insieme non poteva essere considerata sufficiente a causa del possibile sorgere di antinomie logiche; era pertanto necessario procedere ad una sua correzione, ovvero ad una più dettagliata specificazione del concetto di insieme.

Negli anni tra il 1910 e il 1913 Bertrand Russell e Alfred North Whitehead (1861-1947) pubblicarono i tre volumi dei *Principia Mathematica*, l'opera che molti studiosi considerano il naturale proseguimento ed il perfezionamento dei lavori di Gottlob Frege: per comprendere l'importanza dei *Principia Mathematica* basti pensare che le nozioni ed i simboli introdotti da Russell e da

Whitehead non sono molto dissimili da quanto compare nei testi di matematica pubblicati ai giorni nostri[1].

Per evitare il sorgere delle antinomie, Russell e Whitehead suggerirono una suddivisione gerarchica degli enti logico-matematici in *tipi* ed imposero che l'appartenenza di un ente (considerato come elemento) ad un al tro (considerato come insieme) possa essere proposta soltanto per enti appartenenti a tipi successivi. Per evitare, dunque, che un elemento la cui definizione implica la totalità degli elementi di un insieme possa appartenere a tale insieme (situazione che provocherebbe, come abbiamo visto, l'immediato sorgere dell'antinomia degli insiemi normali), Russell e Whitehead chiamarono:

- enti di tipo 0 gli elementi;
- enti di tipo 1 gli insiemi di enti di tipo 0, ovvero gli insiemi di elementi;
- enti di tipo 2 gli insiemi di enti di tipo 1, ovvero gli insiemi di insiemi;
- e così via.

Evidentemente tale nuova impostazione escludeva la possibilità di verificarsi di situazioni analoghe a quella descritta nell'antinomia di Russell (si veda il paragrafo 5.2): tutti gli insiemi, non potendo più contenere se stesso come elemento, dovranno essere normali.

A questa suddivisione gerarchica in tipi, Russell e Whitehead affiancarono un'ulteriore suddivisione in ordini, con l'intento di evitare eventuali definizioni di un ente matematico basate su circoli viziosi, ovvero su situazioni dipendenti dallo stesso ente da definire (con la conseguente possibilità di nuove antinomie).

La profonda impostazione dei *Principia Mathematica* si rivelò purtroppo complicata e quindi scarsamente utilizzabile. Alcuni tentativi degli stessi Russell e Whitehead per migliorarne l'applicabilità pratica si sono rivelati poco efficaci (tra il 1921 ed il 1926, Cwistek e Ramsey misero a punto una nuova teoria, detta dei tipi semplici, in cui avrebbero dovuto convergere, grazie ad un delicato sistema di assiomi, le esigenze di rigore e di applicabilità emerse dalle ricerche logiche elaborate tra la fine del XIX secolo ed i primi decenni del XX).

---

[1] Un confronto tra alcune simbologie è proposto nella tabella seguente:

Hugh McColl (1837-1909)	*A'*	$+$	$\times$	$:$	$=$
Bertrand Russell	$\sim p$	$\vee$	$.$	$\supset$	$\equiv$
Jan Lukasiewicz (1878-1956)	*Np*	*A*	*K*	*C*	*E*

(ad esempio: *Cpq* indica: $p \rightarrow q$; ricordiamo che Lukasiewicz studiò alcune logiche con più di due valori di verità; per una presentazione indichiamo ad esempio D'Amore & Matteuzzi, 1975, pp. 199-207). Giuseppe Peano (1858-1932) utilizzava i segni $-$, $\cap$, $\cup$, rispettivamente per la negazione, per la disgiunzione e per la congiunzione; David Hilbert (1862-1943) indicava con *&* la congiunzione e con $\rightarrow$ l'implicazione.

Come abbiamo visto, Russell era dell'opinione che "la limitazione debba riguardare *la natura delle sostanze che intervengono come elementi nella molteplicità* e che si debba ammettere l'esistenza degli insiemi solo in corrispondenza a molteplicità i cui elementi siano omogenei dal punto di vista di una gerarchia delle sostanze" (Casari, 1964, p. 32).

La scelta di Zermelo è ben diversa: egli "ritiene invece che la limitazione debba riguardare *la natura delle molteplicità* (non quella dei suoi elementi) e che cioè si debbano ammettere solo gli insiemi corrispondenti a certe molteplicità particolari costituite attraverso l'applicazione di certi ben determinati processi" (Casari, 1964, p. 32). M. Kline nota che "il programma di Zermelo prevedeva di ammettere nella teoria degli insiemi solo quelle classi che con meno probabilità avrebbero generato contraddizioni. Perciò la classe nulla [vuota], ogni classe finita e la classe dei numeri interi sembravano sicure. Data una classe sicura, certe classi formate da essa, come ogni sottoclasse, l'unione delle classi sicure e la classe di tutti i sottoinsiemi di una classe sicura dovrebbero essere classi sicure. Tuttavia egli evitava la complementazione perché, mentre x può essere una classe sicura, il suo complemento potrebbe non essere sicuro in qualche universo di oggetti" (Kline, 1991, II, p. 1381).

Presenteremo la traduzione degli assiomi della teoria degli insiemi di Zermelo, risalenti al 1908 (seguiremo: D'Amore & Matteuzzi, 1975, p. 96):

Assioma I. *Bestimmtheit* o **Assioma della determinazione**. Se ogni elemento di un insieme M è anche un elemento di N, e viceversa, allora è M = N: pertanto ogni insieme è determinato dai propri elementi.

Assioma II. *Elementarmengen* o **Assioma degli insiemi elementari**. Esiste un insieme improprio, l'insieme vuoto, che non contiene alcun elemento. Se a è un oggetto del dominio [per Zermelo, sinonimo di insieme], esiste l'insieme $\{a\}$ che contiene soltanto a come elemento. Se a e b sono oggetti del dominio, allora esiste l'insieme $\{a, b\}$ che contiene come elementi a, b e soltanto essi.

Assioma III. *Aussonderung* o **Assioma di separazione**. Se un predicato $F(x)$ è definito per tutti gli elementi di un insieme M, allora M ha un sottoinsieme M_F che contiene come elementi tutti gli elementi x di M per i quali il predicato $F(x)$ è vero.

Assioma IV. *Potenzmenge* o **Assioma dell'insieme potenza**. Ad ogni insieme T corrisponde un insieme $P(T)$ che contiene come elementi tutti e soltanto i sottoinsiemi di T.

Assioma V. *Vereinigung* o **Assioma dell'unione**. Ad ogni insieme T corrisponde un insieme S(T) che contiene come elementi tutti e soltanto i sottoinsiemi di T che contengono un solo elemento.

Il nome di Zermelo è legato inoltre all'*assioma della scelta* (Rubin & Rubin, 1963; Monk, 1972, pp. 151-165); secondo tale assioma, dato un insieme qualsiasi di insiemi non vuoti e disgiunti, è possibile scegliere un elemento in ciascuno di tali insiemi in modo che questi elementi costituiscano un (nuovo) insieme ("L'assioma di scelta ha applicazioni importanti in quasi tutti i settori della matematica; in particolare, nella stessa teoria degli insiemi e in algebra, analisi e topologia": Rogers, 1978, p. 154). La sua formulazione originale è la seguente:

Assioma VI. *Auswahlt* o **Assioma della scelta**. Se T è un insieme, del quale gli elementi sono insiemi non vuoti a due a due disgiunti, allora l'insieme unione S(T) contiene almeno un sottoinsieme S_1 avente uno ed un solo elemento in comune con ciascun elemento di T.

Assioma VII. *Axiom des Unendlichen* o **Assioma dell'infinito**. Il dominio contiene almeno un insieme Z contenente a sua volta l'insieme vuoto come elemento ed è costituito in modo tale che a ciascun suo elemento a corrisponda un ulteriore elemento $\{a\}$.

Si ottiene l'insieme infinito costituito da: 0, $\{0\}$, $\{\{0\}\}$, ...

Abraham A. Fraenkel (1891-1965) riprese i risultati di Zermelo e nel 1922 li formulò nel linguaggio del calcolo dei predicati: il sistema assiomatico per la teoria degli insiemi che venne messo a punto è noto come sistema di Zermelo-Fraenkel, identificato dalla sigla ZF, una teoria del primo ordine con uguaglianza (si veda: Lolli, 1974, pp. 15-18; Rogers, 1978, pp. 137-156; per una sua presentazione informale ma corretta si veda: Crossley, 1976, pp. 93-121). Anche per sottolineare la differenza formale rispetto agli assiomi sopra riportati, richiamiamo la moderna espressione degli assiomi di ZF:

A1. **Assioma di estensionalità**

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z(z\in x \leftrightarrow z\in y) \rightarrow x = y)$$

Questo assioma è decisivo per il superamento delle antinomie logiche: Zermelo dimostrò infatti che "ogni insieme ha almeno un sottoinsieme che non è suo elemento... Questo risultato elimina evidentemente l'antinomia di Russell" (Casari, 1964, p. 44).

Definiamo ora $x \subseteq y$ con:

$$(\forall z)(z \in x \rightarrow z \in y).$$

A2. **Assioma dell'insieme vuoto**

$$(\exists x)(\forall y)\neg(y \in x)$$

Si noti che A2 afferma l'esistenza dell'insieme vuoto $\varnothing$ (unico per A1).

A3. **Assioma della coppia (non ordinata)**

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall w)(w \in z \leftrightarrow (w = x \vee w = y))$$

A4. **Assioma dell'insieme somma (o dell'unione)**

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow (\exists t)(z \in t \wedge t \in x))$$

Definiamo $z = x \cup y$ con: $(\forall t)(t \in z \leftrightarrow (t \in x \vee t \in y))$.

A5. **Assioma dell'infinito**

$$(\exists x)(\varnothing \in x \wedge (\forall y)(y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x))$$

All'insieme infinito che si può costruire per A5 appartengono i termini della:

$$\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \ldots$$

A6$_n$. **Schema di assiomi di rimpiazzamento**

$$(\forall t_1)\ldots(\forall t_k)((\forall x)(\exists! y)A_n(x, y, t_1, \ldots, t_k) \rightarrow (\forall u)(\exists v)B(u, v)),$$
dove $B(u, v)$ significa $(\forall r)(r \in v \leftrightarrow (\exists s)(s \in u \wedge A_n(s, r, t_1, \ldots, t_k)))$

Ogni assioma di tale schema corrisponde ad una A_n.

A7. **Assioma dell'insieme potenza**

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$$

A8. **Assioma di scelta**

se esiste una funzione A: $\alpha \rightarrow A_\alpha$ che ad ogni $\alpha \in x$ fa corrispondere $A_\alpha \neq \emptyset$ ($x \subseteq$ dominio di A), allora esiste almeno una funzione f: $\alpha \rightarrow f(\alpha)$ definita per ogni $\alpha \in x$ ($x \subseteq$ dominio di f) tale che $f(\alpha) \in A_\alpha$

A9. **Assioma di regolarità**

$(\forall x)(\exists y)(x \neq \emptyset \vee (y \in x \wedge (\forall z)(z \in x \rightarrow \neg(z \in y))))$

Un altro sistema di assiomi fu ideato da John von Neumann (1903-1957), che introdusse una distinzione tra "insieme" e "classe". Ci tiamo ancora E. Casari:

"La caratteristica fondamentale di questo impianto della teoria degli insiemi è costituita dall'idea che non è tanto l'esistenza degli insiemi in corrispondenza ad ogni molteplicità quella che dà origine alle contraddizioni, quanto invece l'assunzione che ogni insieme possa entrare a far parte di altri insiemi" (Casari, 1964, p. 56).

Von Neumann ritenne dunque opportuno individuare due diversi tipi di "aggregati": gli insiemi, che possono essere membri di una classe, e le classi, che non possono, a loro volta, appartenere ad una classe (né ovviamente ad un insieme). Le ricerche di Von Neumann (1925) furono riprese nel 1940 da Kurt Gödel (1906-1978) e tra il 1937 ed il 1958 da Paul Bernays (1888-1979); dalle loro iniziali il sistema viene indicato con la sigla NGB (Mendelson, 1972; sul ruolo di NGB rispetto a ZF: Casari, 1964 e Lolli, 1985).