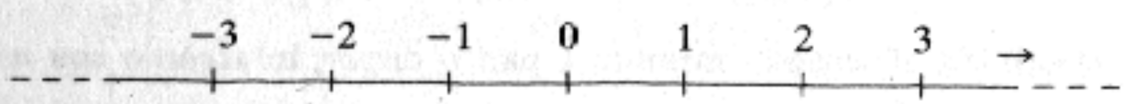
2) Cos'è $f \circ f$ se la permutazione f coincide con la propria inversa?
3) Trovare la classe delle seguenti permutazioni

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 7 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

4) Quante sono le permutazioni di classe pari in Σ_4?
5) Verificare che, se f è una permutazione, $(f^{-1})^{-1} = f$.
6) Se f è una permutazione di classe dispari, che classe ha f^{-1}?

§ 6. Numeri interi: induzione

6.1. L'insieme dei *numeri interi* $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ è il sistema numerico che si impara ad usare fin dalle scuole inferiori. Supporremo senz'altro note le proprietà delle operazioni fondamentali definite in $\mathbf{Z}$, cioè l'addizione e la moltiplicazione (proprietà che riassumeremo nel numero 12.) nonché la relazione $<$ (*minore di*) in base alla quale $\mathbf{Z}$ viene *ordinato linearmente*. Qui $x<y$ (equivalentemente: $y>x$) significa che x precede y nel verso indicato.



6.2. I numeri interi maggiori di 0 si dicono positivi o *numeri naturali* e si denotano con il simbolo $\mathbf{N}$, ponendo cioè $\mathbf{N} = \{x \mid x \in \mathbf{Z},\ x > 0\}$. Una importante proprietà degli interi positivi è il seguente

Assioma del buon ordinamento: *ogni insieme non vuoto di interi positivi possiede un elemento minimo.*

In altre parole: se $\emptyset \neq S \subseteq \mathbf{N}$, allora esiste $m \in S$ tale che $m \leqslant s$ per ogni $s \in S$. Si usa la parola *assioma* perché su questa proprietà (assieme a poche altre) si può fondare una precisa definizione di $\mathbf{N}$ e di $\mathbf{Z}$ (definizione cui abbiamo rinunciato di proposito a questo livello).

6.3. Come prima applicazione dell'assioma del buon ordinamento, deriviamo un'altra proprietà che porta il nome di *induzione* e sta alla base di molte dimostrazioni che incontreremo in seguito:

Principio di induzione o di ricorrenza (prima forma): *consideriamo, per ogni numero naturale n, un'asserzione $A(n)$ ad esso associata, e supponiamo di sapere che*: 1) $A(1)$ *è vera*; 2) *per ogni* $k \in \mathbf{N}$, *supposta vera* $A(k)$, *ne segue che è vera* $A(k+1)$. *Allora l'asserzione* $A(n)$ *è vera per ogni* $n \in \mathbf{N}$.

Dimostrazione: sia S l'insieme degli interi positivi per i quali l'asserzione non è vera $S = \{x \mid x \in \mathbf{N},\ A(x) \text{ è falsa}\}$. Ci proponiamo di provare che S è vuoto. Supponiamo allora S non vuoto (ragionamento *per assurdo*) e proviamo che ne segue una contraddizione. Sia dunque $S \neq \emptyset$. Allora per l'assioma del buon ordinamento, S ha un minimo m. Dunque $A(m)$ è falsa (perché $m \in S$), mentre $A(1)$ è vera, ipotesi 1). Allora $m \neq 1$, quindi $m > 1$; poiché m è il minimo di S, $m-1 \notin S$ e perciò $A(m-1)$ è vera. Ma allora, per l'ipotesi 2), anche $A(m)$ è vera, perché $m = (m-1)+1$. Così $A(m)$ sarebbe contemporaneamente vera e falsa; un controsenso. Si conclude che la eventualità $S \neq \emptyset$ non si può presentare, cioè S è vuoto, come volevamo.

6.4. Esempio di dimostrazione *per induzione*. Sia $A(n)$ l'asserzione: *la somma dei primi n numeri naturali dispari è uguale ad* n^2:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2.$$

Allora $A(1)$ è vera perché $1 = 1^2$, e dunque l'ipotesi 1) del principio di induzione è verificata. Supponiamo allora che $A(n)$ sia vera per un certo $n \in \mathbf{N}$; segue da ciò che anche $A(n+1)$ è vera? Osserviamo che la somma dei primi $n+1$ numeri naturali dispari si ottiene aggiungendo alla somma dei primi n il numero $2(n+1)-1 = 2n+1$; dunque questa somma vale $(1+3+5+\ldots+(2n-1)) + 2n+1 = n^2+2n+1 = (n+1)^2$. Ma questa è proprio l'asserzione $A(n+1)$. Così anche l'ipotesi 2) del principio di induzione è verificata. Concludiamo *per induzione* che $A(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbf{N}$.

6.5. Altro esempio: siano $x, y \in \mathbf{Z}$; dimostriamo che *per ogni* $n \in \mathbf{N}$ *si ha la* formula del binomio

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + nxy^{n-1} + y^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}y^k.$$

Per $n = 1$ l'asserzione è vera, perché $(x+y)^1 = x + y = \binom{1}{0}x + \binom{1}{1}y$.