Supponiamola vera per n. Allora risulta

$$(x+y)^{n+1}=(x+y)^n(x+y)=\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\right)(x+y)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k+1}y^k+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1}.$$

Sostituendo l'indice k con l'indice $h=k+1$ e mettendo in evidenza l'ultimo addendo, la seconda sommatoria si può scrivere

$$\sum_{h=1}^{n}\binom{n}{h-1}x^{n-h+1}y^h+y^{n+1};$$

mettendo in evidenza il primo addendo, la prima sommatoria si può scrivere

$$x^{n+1}+\sum_{h=1}^{n}\binom{n}{h}x^{n-h+1}y^h.$$

Se ora usiamo la relazione $\binom{n}{h-1}+\binom{n}{h}=\binom{n+1}{h}$ che abbiamo dimostrato in 4.7., si ottiene:

$$(x+y)^{n+1}=x^{n+1}+\sum_{h=1}^{n}\left[\binom{n}{h}+\binom{n}{h-1}\right]x^{n-h+1}y^h+y^{n+1}=$$

$$=x^{n+1}+\sum_{h=1}^{n}\binom{n+1}{h}x^{n+1-h}y^h+y^{n+1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{(n+1)-k}y^k.$$

Questo è l'asserto per $n+1$, quindi la formula è dimostrata *per induzione*, per qualsiasi $n\in\mathbf{N}$.

6.6. L'assioma del buon ordinamento vale, ovviamente, anche se al posto di $\mathbf{N}$ si considera $\mathbf{N}\cup\{0\}$, l'insieme degli interi non negativi. Di conseguenza, nel principio di induzione, l'asserto rimane valido se si sostituiscono gli interi positivi con quelli non negativi; allora l'ipotesi $A(1)$ *è vera* va sostituita con $A(0)$ *è vera.*

6.7. Principio di induzione (seconda forma): *per ogni intero $n\geq 0$ consideriamo l'asserzione $A(n)$ e supponiamo di sapere che*: 1) $A(0)$ *è vera*; 2) *per*

ogni $m>0$, se $A(k)$ è vera per ogni k soddisfacente a $0\leq k<m$, allora anche $A(m)$ è vera. Allora $A(n)$ è vera per ogni $n\geq 0$.

Dimostrazione: Sia S l'insieme degli $s\geq 0$ per cui $A(s)$ è falsa. Supponiamo per assurdo $S\neq\emptyset$ e sia m il minimo. Allora $A(m)$ è falsa e quindi $m>0$ perché per l'ipotesi 1) $A(0)$ è vera; mentre $A(k)$ è vera per ogni $k<m$ (perché m è il minimo di S). Ma allora, per l'ipotesi 2), $A(m)$ è vera: contraddizione.

6.8. Questa forma del principio di induzione, pur essendo una variazione della prima, fornisce un metodo di dimostrazione più potente: esistono cioè casi (vedi 6.9.) in cui è facile provare l'ipotesi 2) della seconda forma ma è meno facile provare l'ipotesi 2) della prima forma.

6.9. Divisione: *Siano m,n numeri interi, con $m>0$, $n\geq 0$. Allora esistono due interi q,r con $0\leq r<m$ tali che: $n=mq+r$.*

Dimostrazione: Applichiamo il principio di induzione nella seconda forma (rispetto ad n). Se $n=0$, basta porre $q=r=0$: l'asserto $A(0)$ è vero. Sia $n>0$. Vediamo se $A(n)$ segue dall'ipotesi che $A(k)$ sia vero per ogni k, con $0\leq k<n$. Se $m>n$, basta porre $q=0$, $r=n$. Se invece $m\leq n$, allora $0\leq n-m<n$. Per l'ipotesi (*induttiva*) l'asserto $A(n-m)$ è vero: cioè esistono due numeri interi q_1,r_1 tali che $n-m=mq_1+r_1$, $0\leq r_1<m$. Ma allora $n=m+mq_1+r_1=m(q_1+1)+r_1$ e questo è proprio $A(n)$. Per il principio di induzione $A(n)$ vale per ogni $n\geq 0$.

6.10. Il principio di induzione può essere usato per definire alcune applicazioni che abbiano per dominio l'insieme dei numeri naturali: precisamente, in base ad esso possiamo asserire di aver definito un'applicazione f di $\mathbf{N}$ in un insieme X, se conosciamo $f(1)$ e abbiamo dato una regola che permette di calcolare $f(n)$ mediante i valori $f(k)$ con $k<n$. Ad esempio l'applicazione $f\colon\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ che ad ogni n associa il suo fattoriale (vedi 4.4.) può essere definita da $f(1)=1$, $f(n+1)=f(n)\cdot(n+1)$. Così la potenza (n-esima) di un numero intero z è (l'immagine di n secondo) l'applicazione $g\colon\mathbf{N}\to\mathbf{Z}$ definita da $g(1)=z$, $g(n+1)=g(n)\cdot z$.

Esercizi

1) Usando il principio di induzione, si dimostri che se X è un insieme con un numero finito n di elementi, allora $\mathcal{P}(X)$ ha 2^n elementi.