§ 10. Scrittura *b*-adica

La *notazione* che abbiamo sempre adoperato per gli interi è quella *decimale* o 10-*adica* o *in base* 10. Con ciò intendiamo ad esempio che al simbolo 3502 si associa il numero $3\cdot10^3+5\cdot10^2+0\cdot10+2$; la notazione è cioè la seguente: se un numero si ottiene dalla somma

$$A_r\cdot10^r+A_{r-1}\cdot10^{r-1}+\ldots+A_1\cdot10+A_0 \qquad \text{con } 0\leqslant A_i<10,$$

allora tale numero si scrive giustapponendo (non moltiplicando!) gli A_i nell'ordine $A_rA_{r-1}\ldots A_1A_0$. Ci proponiamo di illustrare come il ruolo del numero 10 in questa notazione possa essere svolto da ogni intero $b\geq2$. Ad esempio, per $b=7$ abbiamo

$$3502=1\cdot7^4+3\cdot7^3+1\cdot7^2+3\cdot7+2.$$

La notazione 7-adica per il decimale 3502 è dunque 13132. La determinazione delle cifre A_i si ottiene mediante successive divisioni per 7:

$$\begin{aligned}3502&=7\cdot500+2\\500&=7\cdot71+3\\71&=7\cdot10+1\\10&=7\cdot1+3\\1&=7\cdot0+1.\end{aligned}$$

Si dividono cioè i quozienti successivi per 7 fino ad ottenere quoziente 0. I resti forniscono, nell'ordine inverso, le cifre della notazione 7-adica. Infatti sostituendo ciascuna eguaglianza nella precedente, si ottiene:

$$\begin{aligned}3502&=7\cdot500+2=7(7\cdot71+3)+2=7^2\cdot71+7\cdot3+2=\\&=7^2(7\cdot10+1)+7\cdot3+2=7^3\cdot10+7^2\cdot1+7\cdot3+2=\\&=7^3(7\cdot1+3)+7^2\cdot1+7\cdot3+2=7^4\cdot1+7^3\cdot3+7^2\cdot1+7\cdot3+2.\end{aligned}$$

Seguendo la falsariga di questo esempio si può provare la parte *esistenza* del seguente teorema:

Sia $b\geq2$ un intero fissato. Allora ogni intero positivo m si scrive in modo unico nella forma

$$m=a_rb^r+a_{r-1}b^{r-1}+\ldots+a_1b+a_0$$

con $a_r\neq0$, $0\leqslant a_i<b$ per $i=0,1,\ldots,r$.

Per dimostrare l'*unicità*, supponiamo che $m=a'_sb^s+\ldots+a'_0$ sia pure una rappresentazione b-adica di m. Allora a'_0 è il resto della divisione di m per b è quindi $a_0=a'_0$. Anche i quozienti devono coincidere $a'_sb^{s-1}+\ldots+a'_1=a_rb^{r-1}+\ldots+a_1$ e così proseguendo $a'_1=a_1$, $a'_2=a_2$, ecc.

Particolare importanza ha recentemente assunto il sistema di numerazione 2-adica (detto anche *binario*), perchè l'uso delle sole cifre 0, 1 corrisponde alle esigenze dei dispositivi elettronici. Naturalmente il passaggio dalla notazione decimale a quella binaria comporta un aumento del numero delle cifre (precisamente: in base b hanno al più r cifre i primi b^r numeri interi). Ad esempio 3502 in base 2 si scrive 110110101110.

Anche in base b le somme e i prodotti si possono calcolare, mutatis mutandis, con le consuete regole: ad esempio le operazioni $7+5=12$ e $7\cdot5=35$ nella notazione binaria si scrivono:

$$\begin{array}{r}111+\\101\\\hline1100\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{r}111\times\\101\\\hline111\\111\text{--}\\\hline100011\end{array}$$

§ 11. Congruenze

11.1 Assegnato un intero non nullo m, diremo che due interi x,y sono *congrui modulo m* e scriveremo $x\equiv y \pmod m$ se essi differiscono per un multiplo di m, cioè se $m\,|\,(x-y)$. Ad esempio $14\equiv2 \pmod{12}$, $-5\equiv55 \pmod{10}$. Se x non è congruo ad y modulo m, scriviamo $x\not\equiv y \pmod m$. Ad esempio $3\not\equiv5 \pmod 3$. Naturalmente $x\equiv y \pmod 0$ se e solo se $x=y$.

11.2 Un criterio per stabilire la congruenza di due numeri è il seguente: