LOGICA MATEMATICA

Canale E–O a.a. 2008–09

Docente: C. Malvenuto

Compito B (prima parte del programma) – 26 gennaio 2009

Istruzioni.

- Completare subito la parte inferiore di questa pagina con il proprio nome, cognome e firma.
- Scrivere a penna o a matita. Non sono ammessi libri, quaderni, né calcolatrici.
- Tutte le risposte vanno **motivate**.
- **NON PARLARE** pena il ritiro immediato del compito.

ESERCIZIO	PUNTEGGIO
1	/15+10
2	/25
3	/25
4	/15
5	/10
TOTALE	/100

Nome e Cognome ↓	**Firma ↓**

Esercizio 1.

1. *(15 punti)* Quali proprietà (riflessiva, simmetrica, transitiva) soddisfa la seguente relazione sull'insieme $X = \{a, b, c\}$? È una relazione di equivalenza? Se sì, descrivere le classi di equivalenza.

$$R_1 = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, a), (c, c)\}.$$

2. *(10 punti)* Rispondere alle stesse domande a proposito della relazione

$$R_2 = \{(a, a), (a, c), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}.$$

1. La relazione $R_1 = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, a), (c, c)\}$ è riflessiva perché ogni elemento dell'insieme X è in relazione con sé stesso, cioè sono presenti le coppie (a, a), (b, b) e (c, c); è simmetrica perché, presa comunque una coppia (x, y), è presente anche la corrispondente coppia (y, x). Infine è transitiva perché ogni volta che nell'insieme sono presenti due coppie tali che il secondo elemento della prima è uguale al primo elemento della coppia (cioè due coppie della forma (x, y) e (y, z)), è presente anche la coppia composta dal primo elemento della prima coppia e dal secondo della seconda (cioè la coppia (x, z)): date le coppie (a, a) e (a, b) la proprietà transitiva richiede che sia presente la coppia (a, b), date le coppie (a, b) e (b, a) la proprietà transitiva richiede che sia presente la coppia (a, a), e così via.

   Essendo riflessiva, simmetrica e transitiva, la relazione è di equivalenza. Le sue classi di equivalenza sono $\{a, b\}$ (perché a e b sono in relazione solo l'una con l'altra) e $\{c\}$ (perché c non è in relazione con alcun altro elemento).

2. La relazione $R_2 = \{(a, a), (a, c), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$ è riflessiva e simmetrica per gli stessi motivi della R_1; essa non è però transitiva: contiene le coppie (a, c) e (c, b), ma non la coppia (a, b).

   Non essendo transitiva, la R_2 non è una relazione di equivalenza.

Esercizio 2. *(25 punti)* Sia data la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ è pari} \\ n+1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} .$$

Determinare $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(6)$. Determinare inoltre l'immagine di f e dire se f è suriettiva e se è iniettiva.

L'insieme $f^{-1}(5)$, la controimmagine di 5, è composto dagli elementi del dominio la cui immagine è 5, cioè $f^{-1}(5) = \{m \in \mathbb{N} \; : \; f(m) = 5\}$. Se un elemento m del dominio è pari, la sua immagine $f(m)$ sarà 5 se $m/2 = 5$: quindi $m = 10$ appartiene a $f^{-1}(5)$. Se m è dispari, avrà immagine 5 se $m + 1 = 5$; ma questo implicherebbe $m = 4$, che non è dispari. Quindi $f^{-1}(5) = \{10\}$.

Ragionando similmente, per quanto riguarda $f^{-1}(6)$, se m appartiene alla controimmagine ed è pari si deve avere $m/2 = 6$, cioè $m = 12$; se m è dispari si deve avere $m + 1 = 6$, cioè $m = 5$ che è effettivamente dispari. Quindi si ha $f^{-1}(6) = \{5, 12\}$.

Ogni elemento n di $\mathbb{N}$ è immagine di $2n$, e quindi la funzione è suriettiva e la sua immagine è tutto $\mathbb{N}$. Invece non è iniettiva, come è mostrato per lo meno dal fatto che, come visto sopra, l'elemento 6 del codominio è immagine di due diversi elementi del dominio.

Esercizio 3. *(25 punti)* Dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, si ha

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)2^k = n2^{n+1}.$$

Sia $P(n)$ l'uguaglianza $\sum_{k=1}^{n}(k+1)2^k = n2^{n+1}$.
(Passo base) Per $n = 1$ l'uguaglianza data, $P(1)$, diventa $2 \cdot 2 = 1 \cdot 2^2$, cioè $4 = 4$.
(Ipotesi induttiva) Sia $n \geq 1$ tale che $P(n)$ è vera, cioè

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)2^k = n2^{n+1}.$$

(Passo induttivo) Mostriamo che $P(n + 1)$ è vera:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (k+1)2^k &= \sum_{k=1}^{n} (k+1)2^k + ((n+1)+1)2^{n+1} \\ &= n2^{n+1} + (n+2)2^{n+1} \\ &= (2n+2)2^{n+1} \;=\; 2(n+1)2^{n+1} \;=\; (n+1)2^{n+2}. \end{aligned}$$

Questo mostra che, per ogni $n \geq 1$, si ha $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$.
Per il principio di induzione segue che l'uguaglianza è vera per ogni $n \geq 1$.

Esercizio 4. *(15 punti)* Sia data l'applicazione $f : X \to \{a\}$ definita tramite $f(x) = a$ per ogni elemento x di X. Allora f è iniettiva:

A. solo quando X è l'insieme vuoto;
B. per ogni insieme X tale che $|X| \leq 1$;
C. per ogni insieme X tranne l'insieme vuoto;
D. per qualsiasi insieme X;
E. nessuna delle precedenti è corretta.

Chiedere che la f sia iniettiva è equivalente a chiedere che non accada mai che due diversi elementi di X abbiano lo stesso elemento come immagine. In questo caso l'unica possibile immagine è l'elemento a, e quindi se X avesse due o più elementi, essi avrebbero la stessa immagine. Invece se X è vuoto o ha un solo elemento la condizione è soddisfatta. Quindi la risposta corretta è la **B.**

(Ricordate che non c'è nessun problema se in una applicazione il dominio è vuoto, indipendentemente dal codominio: si ha semplicemente l'applicazione vuota in cui nessun elemento è associato a un altro. Il discorso sarebbe diverso nel caso in cui il dominio fosse non vuoto e il codominio vuoto: in questo caso nel dominio ci sarebbero elementi a cui non è assegnata un'immagine, e quindi non si avrebbe un'applicazione.)

Esercizio 5. *(10 punti)* Dare la definizione di relazione di ordine.

Una relazione ρ su un insieme A si dice di ordine se soddisfa la proprietà riflessiva (per ogni $a \in A$ si ha $a\rho a$), antisimmetrica (per ogni $a, b \in A$ valgono sia $a\rho b$ che $b\rho a$ se e solo se $a = b$) e transitiva (presi comunque $a, b, c \in A$ tali che $a\rho b$ e $b\rho c$, si ha $a\rho c$).