LOGICA MATEMATICA

Canale E–O a.a. 2008–09

Docente: C. Malvenuto

Compito A (seconda parte del programma) – 26 gennaio 2009

Istruzioni.

- Completare subito la parte inferiore di questa pagina con il proprio nome, cognome e firma.
- Scrivere a penna o a matita. Non sono ammessi libri, quaderni, né calcolatrici.
- Tutte le risposte vanno **motivate**.
- **NON PARLARE** pena il ritiro immediato del compito.

ESERCIZIO	PUNTEGGIO
1	/10
2	/20
3	/15
4	/15
5	/25
6	/15
TOTALE	/100

Nome e Cognome ↓	**Firma ↓**

Esercizio 1. *(10 punti)* Si formalizzi con una formula del calcolo dei predicati la frase "Vanno tutti al mare, tranne Mario", usando la costante M per indicare Mario, il predicato $m(x)$ con il significato "x va al mare" e l'usuale predicato "=" ("uguale").

La frase data si può riformulare come "Mario non va al mare e tutti gli altri ci vanno", oppure "Una persona va al mare se e solo se non è Mario". Quindi un modo per formalizzarla nel calcolo dei predicati è:

$$\forall x\,(m(x) \leftrightarrow \neg(x = M)).$$

(Attenzione: non sarebbe corretto rispondere $\neg m(M) \wedge \forall x\, m(x)$, perché in questo modo diremmo che Mario non va al mare e anche che ci va.)

Esercizio 2. *(20 punti)* Usando il metodo dei tableau, dire se la formula

$$(A \to B) \vee (B \to A)$$

è valida. Se esistono contromodelli per la formula, descriverne uno.

La formula è valida se e solo se il tableau semantico corrispondente alla negata dalla formula data è chiuso. Costruiamo quindi questo tableau.

$$\begin{array}{c}
\neg((A \to B) \vee (B \to A)) \\
| \\
\neg(A \to B), \neg(B \to A) \\
| \\
A, \neg B, B, \neg A \\
\times
\end{array}$$

(Abbiamo applicato ogni volta delle α-regole.) Il tableau è chiuso, e quindi la formula di partenza è valida. Essendo valida, ogni interpretazione possibile è un modello e quindi la formula non ammette contromodelli.

Esercizio 3. *(15 punti)* Sia data la formula del calcolo proposizionale

$$A = (\neg p \to q) \leftrightarrow (p \vee q).$$

Determinare tramite la tavola di verità se la formula A è:

- valida;
- insoddisfacibile;
- sia soddisfacibile che falsificabile.

La tavola di verità richiesta è:

p	q	$\neg p$	$\neg p \to q$	$p \vee q$	A
0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1

Dato che alla formula complessiva corrispondono valori "vero" (1) per tutte le assegnazioni di valori di verità agli atomi p e q, la formula è valida.

Esercizio 4. *(15 punti)* Data la formula del calcolo dei predicati

$$\forall x\, [P(x) \to \exists y\, D(x, y)],$$

esprimere a parole che cosa significa, e dire se è soddisfatta, per ognuna delle seguenti interpretazioni $\mathcal{I}$:

1. $D = \mathbb{N}$, $\mathcal{I}(P)$ è il predicato "pari" (cioè $P(n)$ viene interpretato come "n è pari") e $\mathcal{I}(D)$ è il predicato "doppio" (cioè $D(n, m)$ viene interpretato come "n è il doppio di m");
2. $D = \mathbb{R}$, $\mathcal{I}(P)$ è il predicato "divisibile per 3" e $\mathcal{I}(D)$ è come sopra.

1. La formula significa "Se un numero naturale è pari, esiste un numero naturale di cui esso è il doppio". Questa affermazione è vera, perché i numeri naturali pari sono proprio quelli della forma $2k$ per qualche naturale k, e quindi la prima interpretazione rende vera la formula.
2. Adesso la formula significa "Se un numero reale è divisibile per 3, esiste un numero reale di cui esso è il doppio". Ora, indipendentemente dalla condizione richiesta (la divisibilità per 3), si ha che ogni reale è il doppio di qualche reale (infatti, il numero reale x è il doppio di $x/2$, che è a sua volta un numero reale); quindi questa affermazione è vera, e anche la seconda interpretazione soddisfa la formula.

Esercizio 5. *(25 punti)* Si considerino gli insiemi $A = \{x : x \in \mathbb{R}, 1 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x : x \in \mathbb{Q}, 1 \leq x \leq 2\}$, $C = \{1 + 1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$.

1. Gli insiemi A e B sono equipotenti?
2. Gli insiemi A e C sono equipotenti?
3. Gli insiemi B e C sono equipotenti?

Si noti che l'insieme A è un intervallo dei numeri reali, e quindi ha cardinalità maggiore del numerabile. Invece B, essendo un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$, può avere al più cardinalità numerabile; non essendo un insieme finito, ha esattamente cardinalità numerabile. Per C valgono le stesse considerazioni che per B (e in più in questo caso è anche immediato mettere gli elementi di C in biiezione con quelli di $\mathbb{N}$). Quindi:

1. Gli insiemi A e B non sono equipotenti perché il primo ha cardinalità superiore al numerabile mentre il secondo è numerabile.
2. Gli insiemi A e C non sono equipotenti per lo stesso motivo.
3. Gli insiemi B e C sono equipotenti perché sono entrambi numerabili.

Esercizio 6. *(15 punti)* Dare le definizioni di validità, soddisfacibilità, insoddisfacibilità per una formula del calcolo proposizionale.

Una formula proposizionale si dice valida quando assume valore di verità "vero" in ogni interpretazione; si dice soddisfacibile quando ammette almeno un'interpretazione che la rende vera (cioè un modello); si dice insoddisfacibile quando qualunque interpretazione la rende falsa.