LOGICA MATEMATICA

Canale E–O   a.a. 2006–07

Docente: C. Malvenuto

Compito di esame – 6 febbraio 2007

Istruzioni.

- Completare subito la parte inferiore di questa pagina con il proprio nome, cognome e firma.
- Scrivere solamente su questi fogli, anche dietro se occorre, a penna o a matita. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
- Tutte le risposte vanno **motivate**.
- Nelle domande con risposte multiple, mettere una croce sulla lettera corrispondente alla risposta esatta.
- **NON PARLARE** pena il ritiro immediato del compito.

ESERCIZIO	PUNTEGGIO
1	/15
2	/10
3	/15
4	/20
5	/10
6	/10
7	/15
8	/5
TOTALE	/100

Nome e Cognome ↓	**Firma ↓**

Esercizio 1. (15 punti) Sia R la relazione definita su $\mathbb{Z}$ da:

$$mRn \text{ se e solo se } |m-n| \leq 2.$$

Quali proprietà (riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva, totale) soddisfa la relazione R? È una relazione di equivalenza?

La relazione R è riflessiva: infatti, dato comunque un intero m, si ha $|m-m| = 0 \leq 2$. La relazione è anche simmetrica: comunque si prendano due interi m e n, abbiamo $|m-n| = |n-m|$ e quindi se uno di questi numeri è minore o uguale a 2, lo è anche l'altro.

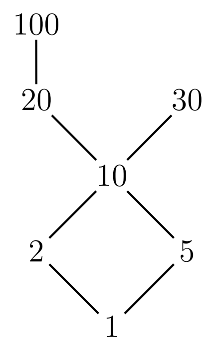
La relazione non è antisimmetrica perché esistono coppie di numeri distinti m, n tali che valgono mRn e nRm: per esempio, $m = 0$ e $n = 1$. Non è neppure transitiva: per esempio, prendendo $l = 0$, $m = 2$ e $n = 4$, si ha lRm e mRn, ma non vale lRn. Infine, la R non è totale, perché non è vero che presi comunque m e n è possibile confrontarli: per esempio, prendendo $m = 0$ e $n = 5$, non sono verificati né mRn né nRm.

Non essendo transitiva, la relazione non è una relazione di equivalenza.

Esercizio 2. (10 punti) Si consideri l'insieme $X = \{1, 2, 5, 10, 20, 30, 100\}$ ordinato mediante la relazione d'ordine $|$ della divisibilità.

1. Disegnare il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato $(X, |)$.

2. Descrivere gli insiemi degli elementi massimali e di quelli minimali, e eventuali massimo e minimo di $(X, |)$; indicare almeno una catena massimale di $(X, |)$.



L'unico elemento minimale è 1 (perché nessun elemento di $X \setminus \{1\}$ divide 1); quelli massimali sono 30 e 100 (perché ognuno di essi non è divisore di alcun elemento di X tranne sé stesso).

Non esiste un massimo perché non esiste un elemento che sia divisibile per ognuno degli altri; 1 è un minimo perché divide tutti gli elementi di X.

Le catene massimali sono $\{1, 2, 10, 20, 100\}$, $\{1, 5, 10, 20, 100\}$, $\{1, 2, 10, 30\}$ e $\{1, 5, 10, 30\}$.

Esercizio 3. (15 punti) Dimostrare per induzione che, se $x \geq 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, vale la disuguaglianza

$$(x+1)^n \geq x^n + 1.$$

Sia $P(n)$ la disuguaglianza $(x+1)^n \geq x^n + 1$. (Si noti che stiamo ragionando per induzione rispetto alla variabile n.)

(Passo base) Per $n = 1$ la disuguaglianza data, $P(1)$, diventa $(x+1)^1 = x^1 + 1$, cioè $x + 1 = x + 1$.

(Ipotesi induttiva) Sia $n \geq 1$ tale che $P(n)$ è vera, cioè

$$(x+1)^n \geq x^n + 1.$$

(Passo induttivo) Mostriamo che $P(n+1)$ è vera:

$$\begin{aligned}
(x+1)^{n+1} &= (x+1)^n(x+1) \\
&\geq (x^n+1)(x+1) \\
&= x^{n+1} + x^n + x + 1 \\
&\geq x^{n+1} + 1 \qquad (\text{perché } x^n + x \geq 0).
\end{aligned}$$

Questo mostra che, per ogni $n \geq 1$, si ha $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Per il principio di induzione segue che la disuguaglianza è vera per ogni $n \geq 1$.

Esercizio 4. (20 punti)

1. Di ognuna delle funzioni

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(x) = x^2, \\ g &: \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ g(x) = x + 2, \\ h &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ h((x, y)) = x + y \end{aligned}$$

   si dica se è iniettiva, suriettiva, biiettiva.

2. Per ognuna delle funzioni che seguono, quando è possibile definirla, la si descriva e si dica se è iniettiva, suriettiva, biiettiva: $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ h$, $h \circ f$, $g \circ h$, $h \circ g$.

1. La funzione f è iniettiva (se due interi positivi sono distinti anche i loro quadrati sono distinti) ma non suriettiva (nell'immagine non ci sono gli interi che non sono quadrati). Anche la g è iniettiva (se $x+2 = y+2$ ne segue $x = y$) ma non suriettiva (nell'immagine non sono contenuti 0 e 1). La h è suriettiva (perché dato comunque un naturale n, esso è immagine di un elemento di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, per esempio di $(0, n)$).

   Nessuna delle funzioni è biiettiva perché nessuna è al contempo iniettiva e suriettiva.

2. Componendo le funzioni date si ha:

$$\begin{aligned} & f \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f \circ g(x) = (x+2)^2, \text{ che è iniettiva ma non suriettiva;} \\ & g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ g \circ f(x) = x^2 + 2, \text{ iniettiva, non suriettiva;} \\ & f \circ h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f \circ h((x, y)) = (x+y)^2, \text{ né iniettiva, né suriettiva;} \\ & h \circ f \quad \text{non è definita perché l'immagine di } f \text{ non è contenuta nel dominio di } h; \\ & g \circ h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ g \circ h((x, y)) = x + y + 2, \\ & h \circ g \quad \text{non è definita, come sopra.} \end{aligned}$$

Esercizio 5. (10 punti) Usando un metodo a scelta dimostrare che l'enunciato A è conseguenza logica dell'enunciato $(B \to \neg A) \to (A \wedge C)$.

Si ricordi che dire che una proposizione Q è conseguenza logica della formula P significa che non avviene mai che la proposizione P sia vera mentre la Q è falsa; quindi se la Q è falsa deve esserlo anche la P.

Quindi un metodo per mostrare che A è conseguenza logica dell'enunciato dato consiste nell'ipotizzare che la A sia falsa e osservare che in tal caso è falsa anche $A \wedge C$, mentre l'implicazione $B \to \neg A$ è vera (perché è vero il conseguente). Quindi, nell'implicazione $(B \to \neg A) \to (A \wedge C)$ sarebbe vero l'antecedente e falso il conseguente, e così l'enunciato sarebbe falso.

Un altro metodo consiste nel far uso di alcune equivalenze usuali per trovare altre formule equivalenti a quella data. In questo caso, ricordando che $M \to N$ è equivalente a $\neg M \vee N$, possiamo scrivere la formula equivalente $\neg(B \to \neg A) \vee (A \wedge C)$, o ancora $(B \wedge A) \vee (A \wedge C)$. Quest'ultima è vera se e solo se è vera $B \wedge A$ o $A \wedge C$, e la verità di ognuna delle due implica che sia vera A.

In alternativa, si ricordi che dire che Q è conseguenza logica di P è equivalente a dire che la formula $P \to Q$ è valida, cioè, in questo caso, che la $[(B \to \neg A) \to (A \wedge C)] \to A$ è valida. Quindi è anche possibile applicare uno dei metodi standard (tavole di verità, tableau semantici) per verificare la validità di quest'ultima formula.

Esercizio 6. (10 punti) Sia data la formula predicativa

$$\forall x\ (A(x) \vee B(x)) \to \forall x\ A(x) \vee \forall x\ B(x).$$

Usando il metodo dei tableau semantici nel caso predicativo verificare che essa non è valida.

Per studiare la validità della formula data $\mathcal{F}$, costruiamo il tableau semantico che ha come radice la sua negazione.

$$\neg(\forall x\ (A(x) \vee B(x)) \to \forall x\ A(x) \vee \forall x\ B(x))$$

$$\Big|$$

$$\forall x\ (A(x) \vee B(x)), \neg(\forall x\ A(x) \vee \forall x\ B(x))$$

$$\Big|$$

$$\forall x\ (A(x) \vee B(x)), \neg\forall x\ A(x), \neg\forall x\ B(x)$$

$$\Big|$$

$$\forall x\ (A(x) \vee B(x)), \exists x\ \neg A(x), \exists x\ \neg B(x)$$

$$\Big|\ \exists : a$$

$$\neg A(a), A(a) \vee B(a), \exists x\ \neg B(x), \forall x\ (A(x) \vee B(x))$$

$$\Big|\ \exists : b$$

$$\neg A(a), \neg B(b), A(a) \vee B(a), A(b) \vee B(b), \forall x\ (A(x) \vee B(x))$$

$$\begin{array}{ll}
\neg A(a), \neg B(b), A(a), A(b) \vee B(b), \forall x\ (A(x) \vee B(x)) & \neg A(a), \neg B(b), B(a), A(b) \vee B(b), \forall x\ (A(x) \vee B(x)) \\
\vdots & \\
\times &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
\neg A(a), \neg B(b), B(a), A(b), \forall x\ (A(x) \vee B(x)) & \neg A(a), \neg B(b), B(a), B(b), \forall x\ (A(x) \vee B(x)) \\
\circ & \times
\end{array}$$

Abbiamo trovato una foglia aperta, che corrisponde a un modello per $\neg\mathcal{F}$ e quindi a un'interpretazione che rende falsa la formula iniziale, che risulta così non valida.

Esercizio 7. (15 punti) Dato il linguaggio del calcolo dei predicati con i simboli per predicati P e M, e gli usuali simboli per variabili e costanti, se ne consideri l'interpretazione il cui dominio è l'insieme dei numeri naturali, e in cui interpretiamo $P(x)$ come "x è un numero pari" e $M(y, z)$ come "y è multiplo di z". Per esempio, interpreteremo la formula $\forall x\ (P(x) \to M(x, 3))$ come "Ogni numero pari è multiplo di 3".

Formalizzare le seguenti frasi nel linguaggio del calcolo dei predicati.

1. Esiste un numero che è multiplo di ogni numero.
2. Se 5 è pari, allora lo sono tutti i numeri.

Tradurre in linguaggio naturale le formule predicative che seguono, usando l'interpretazione descritta sopra, e dire se in questa interpretazione sono vere o no.

3. $\forall x\ (P(x) \lor M(x, 3))$
4. $\exists x \exists y\ \neg M(x, y)$
5. $\exists x \forall y\ (P(y) \to M(y, x))$

1. $\exists x \forall y\ M(x, y)$
2. $P(5) \to \forall x\ P(x)$
3. Ogni numero è pari o multiplo di 3. Nell'interpretazione data questa proposizione è falsa perché, per esempio, 5 non è né pari né multiplo di 3.
4. Esistono due numeri il primo dei quali non è multiplo del secondo. È ovviamente vera.
5. Esiste un numero di cui ogni numero pari è multiplo. È vera, perché ogni numero pari è multiplo di 2.

Esercizio 8. (5 punti) Dimostrare che l'insieme A dei numeri razionali rappresentabili con una frazione della forma $1/n$ (al variare di n negli interi diversi da zero) e l'insieme B degli interi della forma $2k+1$ (k intero) sono equipotenti.

Per dimostrare che A e B sono equipotenti dobbiamo far vedere che esiste una biiezione dall'uno all'altro dei due insiemi (eventualmente facendo vedere che esiste una biiezione tra A e un terzo insieme C, e una tra B e lo stesso insieme C).

Definiamo l'applicazione $f : A \to B$ come $f(1/n) = 2n + 1$ per n maggiore di zero, e $f(1/n) = 2(n + 1) + 1$ per n minore di zero. Essa è iniettiva: se m e n sono entrambi maggiori di zero, si ha che $2n + 1 = 2m + 1$ avviene solo se $n = m$, e analogamente se sono entrambi negativi. Può accadere che per $n > 0$ e $m < 0$ si abbia $f(1/n) = f(1/m)$? Ciò significherebbe $2n+1 = 2m+3$, cioè $n = m+1$, ma non può succedere che un intero negativo e uno positivo abbiano come differenza 1.

La f è suriettiva: dato comunque un elemento di B, cioè un intero dispari $2k + 1$, se è maggiore o uguale a 3 è immagine di $1/k$, mentre se è minore o uguale a 1 è immagine di $1/(k - 1)$.