

LOGICA MATEMATICA

CANALE E-O A.A. 2007-08

Docente: C. Malvenuto

COMPITO DI ESAME – 18 FEBBRAIO 2008

Istruzioni.

- Completare subito la parte inferiore di questa pagina con il proprio nome, cognome e firma.
- Scrivere solamente su questi fogli, anche dietro se occorre, a penna o a matita. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
- Tutte le risposte (tranne dove sono previste risposte multiple) vanno **motivate**.
- Nelle domande con risposte multiple, mettere una croce sulla lettera corrispondente alla risposta esatta.
- **NON PARLARE** pena il ritiro immediato del compito.

ESERCIZIO	PUNTEGGIO
1	/10
2	/15
3	/10
4	/15
5	/15
6	/15
7	/15
8	/5
TOTALE	/100

Nome e Cognome ↓	Firma ↓

Esercizio 1. (10 punti) Sia X l'insieme $\{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$; su X sia definita la relazione ρ data da: $a\rho b$ se e solo se a e b hanno un divisore diverso da 1 in comune (per esempio, $8\rho 10$ perché sia 8 che 10 sono divisibili per 2).

Quali proprietà (riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva, totale) soddisfa la relazione ρ ?

Scrivere tutti gli a per cui vale $8\rho a$.

È una relazione di equivalenza? È una relazione d'ordine?

Esercizio 2. (15 punti) Sia data la funzione $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ definita da $f((a, b)) = a - b$. Determinare $f^{-1}(0)$ e $f^{-1}(-3)$. Determinare inoltre l'immagine di f e dire se f è suriettiva e se è iniettiva.

Esercizio 3. (10 punti) Dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, si ha

$$\sum_{i=1}^n i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Esercizio 4. (15 punti) Siano A e B insiemi. Dimostrare che

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

Esercizio 5. (15 punti) Usando un metodo a scelta dimostrare che il seguente insieme di formule è soddisfacibile e darne un modello:

$$\{A \leftrightarrow B, C \rightarrow B, \neg A \vee C\}.$$

Esercizio 6. (15 punti) Dimostrare, usando il metodo dei tableau semantici nel caso predicativo, che la formula che segue è valida:

$$[\forall x (P(x) \rightarrow Q)] \leftrightarrow [(\exists x P(x)) \rightarrow Q].$$

(Attenzione: Q è un predicato “nullario”, cioè non dipende da alcuna variabile.)

Esercizio 7. (15 punti) Per ognuno dei seguenti insiemi, dire se è equipotente all'insieme dei naturali o no, e perché:

1. $A = \{n : n \in \mathbb{Z}, n \leq 100\}$

2. $B = \{n : n \in \mathbb{N}, n \leq 100\}$

3. $C = \{n : n \in \mathbb{Z}, 50 \leq n \leq 100\}$

4. $D = \{q : q \in \mathbb{Q}, q \text{ può essere scritto nella forma } a/b \text{ con } b \text{ multiplo di } 5\}$

5. $E = \{r : r \in \mathbb{R}, 50 \leq r \leq 100\}$

Esercizio 8. (5 punti) Formalizzare nel calcolo dei predicati la proposizione:

x è pari tutte e sole le volte che y è divisibile per 3 e z non è divisibile per 6.

Si usino i predicati $P(a)$ per “ a è divisibile per 2” e $T(a)$ per “ a è divisibile per 3”.