

# METODI MATEMATICI PER L'INFORMATICA

CANALE E-O A.A. 2008-09

**Docente: C. Malvenuto**

COMPITO DI ESAME – 6 FEBBRAIO 2009

## Istruzioni.

- Completare subito la parte inferiore di questa pagina con il proprio nome, cognome e firma.
- Scrivere solamente su questi fogli, anche dietro se occorre, a penna o a matita. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
- Tutte le risposte vanno  **motivate**.
- **NON PARLARE** pena il ritiro immediato del compito.

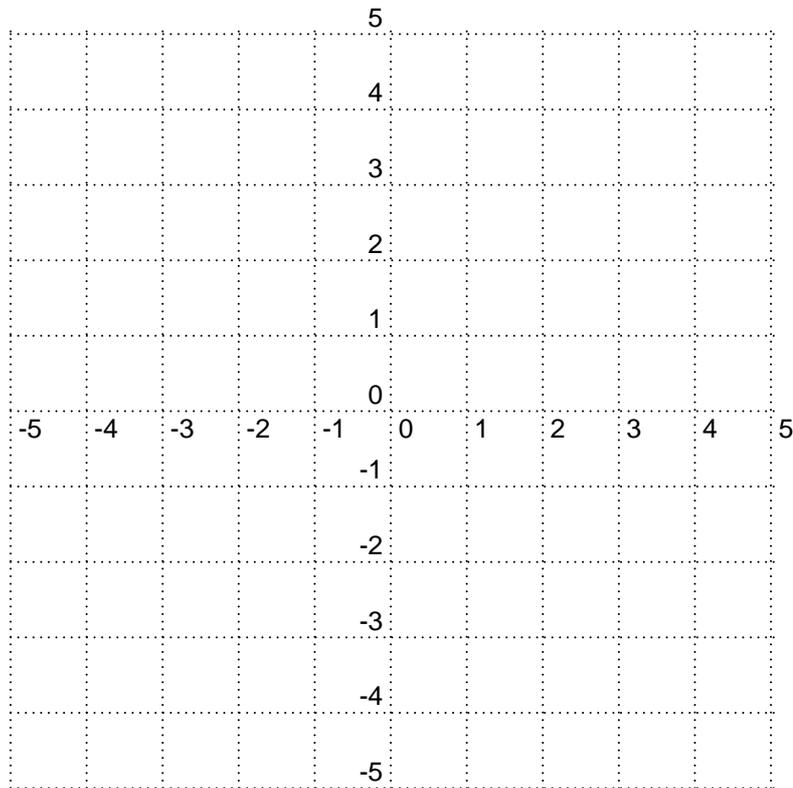
ESERCIZIO	PUNTEGGIO
1	/15
2	/15
3	/10
4	/5
5	/15
6	/10
7	/15
8	/15
TOTALE	/100

Nome e Cognome ↓	Firma ↓

**Esercizio 1.** (15 punti)

1. Disegnare, utilizzando il piano cartesiano in figura, il grafico della relazione  $\rho$  sull'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali definita da

$$x\rho y \Leftrightarrow x - 1 < y \leq x + 1.$$



2. Dire se la relazione è riflessiva e perché.
  3. Dire se la relazione è simmetrica e perché.
-

**Esercizio 2.** (15 punti) Disporre i seguenti insiemi in ordine crescente di cardinalità, specificando la cardinalità di ognuno:

$$A = \{x : x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor = x\}$$

$$B = \{x : x \in \mathbb{R}, x^2 = 3\}$$

$$C = \{x : x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)\}$$

$$D = \{x : x \in \mathbb{R}, x^2 = 0\}$$

(Si ricordi che  $\lfloor x \rfloor$  è la parte intera inferiore di  $x$ , cioè il massimo intero minore o uguale a  $x$ ; per esempio,  $\lfloor 4 \rfloor = 4$ ,  $\lfloor 1,781 \rfloor = 1$  e  $\lfloor \pi \rfloor = 3$ .)

---

**Esercizio 3.** (10 punti) Scrivere la tabella moltiplicativa di  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ , l'insieme delle classi resto modulo 6. (Nella tabella devono comparire solo gli elementi  $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}$ .)

---

**Esercizio 4.** (5 punti) Scrivere nel linguaggio del calcolo dei predicati una formula che si interpreti come “Esiste un numero tale che, per ogni numero  $n$  maggiore di esso,  $n!$  è maggiore di  $3^n$ ”. Usate il predicato  $P(a, b)$  per esprimere la relazione “ $a > b$ ”.

---

**Esercizio 5.** (15 punti) Dimostrare per induzione che per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 0$ , vale l'uguaglianza

$$\sum_{k=0}^n (4k + 1) = 2n^2 + 3n + 1.$$

---

**Esercizio 6.** (10 punti) Sia  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  la funzione definita da  $f(a) := a - |a|$ . La  $f$  è iniettiva? È suriettiva? È biunivoca?  
(Ricordate che  $|x|$  è il modulo, o valore assoluto, di  $x$ : per esempio,  $|5| = 5$ ,  $|-12| = 12$ .)

---

**Esercizio 7.** (15 punti) Si usi il metodo dei tableau semantici per determinare se la formula  $D$  è conseguenza logica dell'insieme di formule  $\{A \rightarrow B, A \vee \neg C, \neg B, \neg D \rightarrow C\}$ .

---

**Esercizio 8.** (15 punti) Sia dato il seguente insieme di formule predicative

$$F = \{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x\neg Q(x), \neg\exists x\neg P(x)\}.$$

Se ne consideri la seguente interpretazione  $\mathcal{I}$ :  $D = \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{I}(P)$  è il predicato “pari” (cioè  $P(n)$  viene interpretato come “ $n$  è pari”) e  $\mathcal{I}(Q)$  è il predicato “divisibile per 4” (cioè  $Q(n)$  viene interpretato come “ $n$  è divisibile per 4”).

1. Scrivere tre frasi in italiano che esprimano a parole il significato delle formule date, in questa interpretazione.
  2. Dire se la  $\mathcal{I}$  è un modello per  $F$ .
-