

METODI MATEMATICI PER L'INFORMATICA

CANALE E-O A.A. 2008-09

Docente: C. Malvenuto

COMPITO DI ESAME – 6 FEBBRAIO 2009

Istruzioni.

- Completare subito la parte inferiore di questa pagina con il proprio nome, cognome e firma.
- Scrivere solamente su questi fogli, anche dietro se occorre, a penna o a matita. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
- Tutte le risposte vanno **motivate**.
- **NON PARLARE** pena il ritiro immediato del compito.

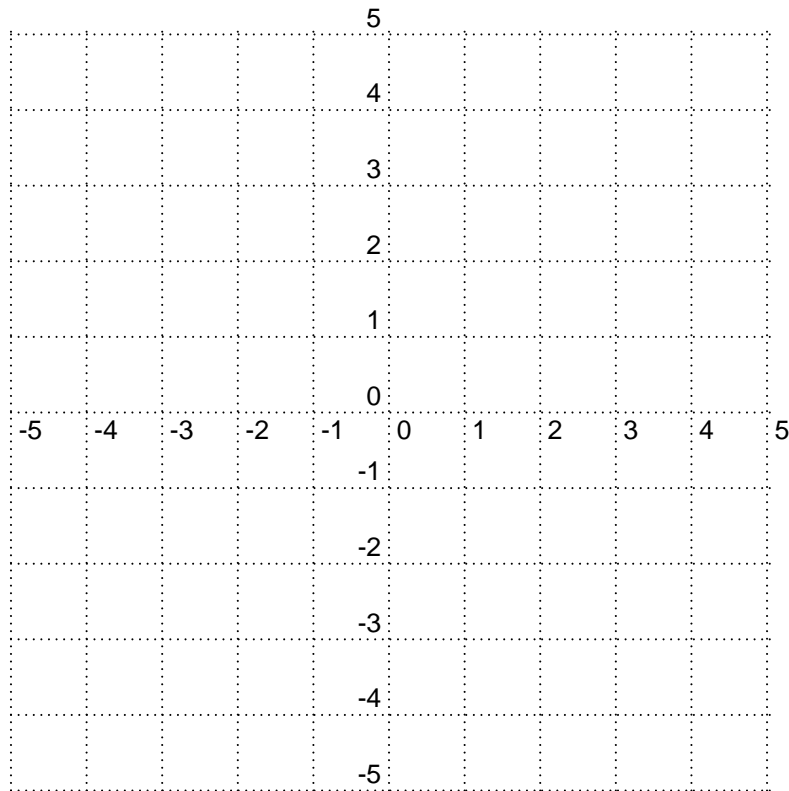
ESERCIZIO	PUNTEGGIO
1	/15
2	/15
3	/10
4	/5
5	/15
6	/10
7	/15
8	/15
TOTALE	/100

Nome e Cognome ↓	Firma ↓

Esercizio 1. (15 punti)

1. Disegnare, utilizzando il piano cartesiano in figura, il grafico della relazione ρ sull'insieme \mathbb{R} dei numeri reali definita da

$$x\rho y \Leftrightarrow x - 1 < y \leq x + 1.$$



2. Dire se la relazione è riflessiva e perché.
 3. Dire se la relazione è simmetrica e perché.
-

Esercizio 2. (15 punti) Disporre i seguenti insiemi in ordine crescente di cardinalità, specificando la cardinalità di ognuno:

$$A = \{x : x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor = x\}$$

$$B = \{x : x \in \mathbb{R}, x^2 = 3\}$$

$$C = \{x : x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)\}$$

$$D = \{x : x \in \mathbb{R}, x^2 = 0\}$$

(Si ricordi che $\lfloor x \rfloor$ è la parte intera inferiore di x , cioè il massimo intero minore o uguale a x ; per esempio, $\lfloor 4 \rfloor = 4$, $\lfloor 1,781 \rfloor = 1$ e $\lfloor \pi \rfloor = 3$.)

Esercizio 3. (10 punti) Scrivere la tabella moltiplicativa di $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$, l'insieme delle classi resto modulo 6. (Nella tabella devono comparire solo gli elementi $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}$.)

Esercizio 4. (5 punti) Scrivere nel linguaggio del calcolo dei predicati una formula che si interpreti come “Esiste un numero tale che, per ogni numero n maggiore di esso, $n!$ è maggiore di 3^n ”. Usate il predicato $P(a, b)$ per esprimere la relazione “ $a > b$ ”.

Esercizio 5. (15 punti) Dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$, vale l'uguaglianza

$$\sum_{k=0}^n (4k + 1) = 2n^2 + 3n + 1.$$

Esercizio 6. (10 punti) Sia $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(a) := a - |a|$. La f è iniettiva? È suriettiva? È biunivoca?
(Ricordate che $|x|$ è il modulo, o valore assoluto, di x : per esempio, $|5| = 5$, $|-12| = 12$.)

Esercizio 7. (15 punti) Si usi il metodo dei tableau semantici per determinare se la formula D è conseguenza logica dell'insieme di formule $\{A \rightarrow B, A \vee \neg C, \neg B, \neg D \rightarrow C\}$.

Esercizio 8. (15 punti) Sia dato il seguente insieme di formule predicative

$$F = \{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x\neg Q(x), \neg\exists x\neg P(x)\}.$$

Se ne consideri la seguente interpretazione \mathcal{I} : $D = \mathbb{N}$, $\mathcal{I}(P)$ è il predicato “pari” (cioè $P(n)$ viene interpretato come “ n è pari”) e $\mathcal{I}(Q)$ è il predicato “divisibile per 4” (cioè $Q(n)$ viene interpretato come “ n è divisibile per 4”).

1. Scrivere tre frasi in italiano che esprimano a parole il significato delle formule date, in questa interpretazione.
 2. Dire se la \mathcal{I} è un modello per F .
-