LOGICA MATEMATICA

Canale E–O   a.a. 2007–08

Docente: C. Malvenuto

Compito di esame – 18 settembre 2008

Istruzioni.

- Completare subito la parte inferiore di questa pagina con il proprio nome, cognome e firma.
- Scrivere solamente su questi fogli, anche dietro se occorre, a penna o a matita. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
- Tutte le risposte vanno **motivate**.
- Nelle domande con risposte multiple, mettere una croce sulla lettera corrispondente alla risposta esatta.
- **NON PARLARE** pena il ritiro immediato del compito.

ESERCIZIO	PUNTEGGIO
1	/15
2	/10
3	/15
4	/15
5	/10
6	/10
7	/20
8	/5
TOTALE	/100

Nome e Cognome ↓	**Firma ↓**

Esercizio 1. (15 punti) Sia R la relazione definita su $\mathbb{Z}$ da:

$$mRn \text{ se e solo se } |m - n| = 5.$$

Quali proprietà (riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva, totale) soddisfa la relazione R? È una relazione di equivalenza? Scrivere, se esistono, alcuni interi n tali che $12Rn$.

Esercizio 2. (10 punti) Si consideri l'insieme $X = \{2, 4, 6, 9, 12, 20, 24\}$ ordinato mediante la relazione d'ordine $|$ della divisibilità.

1. Disegnare il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato $(X, |)$.
2. Descrivere gli insiemi degli elementi massimali e di quelli minimali, e eventuali massimo e minimo di $(X, |)$; indicare almeno una catena massimale di $(X, |)$.

Esercizio 3. (15 punti) Definiamo una successione come segue: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ e, per ogni $n \geq 2$,

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}.$$

Dimostrare per induzione che, per ogni n, si ha $a_n = n$. (Quale forma del principio di induzione conviene usare?)

Esercizio 4. (15 punti)

1. Di ognuna delle funzioni

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x},$$
$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ g(x) = 3x$$

   si dica se è iniettiva, suriettiva, biiettiva.

2. Si dica se la composizione $f \circ g$ è definita e, se sì, la si descriva e si dica se è iniettiva, suriettiva, biiettiva. Si faccia lo stesso per $g \circ f$.

Esercizio 5. (10 punti) Usando un metodo a scelta dimostrare che l'enunciato B è conseguenza logica dell'enunciato $(C \to \neg B) \to (B \wedge A)$.

Esercizio 6. (10 punti) Sia data la formula predicativa

$$\forall x\ (A(x) \vee B(x)) \rightarrow \forall x\ A(x) \vee \forall x\ B(x).$$

Usando il metodo dei tableau semantici nel caso predicativo verificare che essa non è valida.

Esercizio 7. (20 punti) Dato il linguaggio del calcolo dei predicati con i simboli per predicati P e M, e gli usuali simboli per variabili e costanti, se ne consideri l'interpretazione il cui dominio è l'insieme dei numeri naturali, e in cui interpretiamo $P(x)$ come "x è un numero pari" e $M(y, z)$ come "y è multiplo di z". Per esempio, interpreteremo la formula $\forall x\ (P(x) \rightarrow M(x, 3))$ come "Ogni numero pari è multiplo di 3".

Formalizzare le seguenti frasi nel linguaggio del calcolo dei predicati.

1. Esiste un numero che è multiplo di ogni numero.
2. Se non esiste un numero pari, allora tutti i numeri sono multipli di 5.

Tradurre in linguaggio naturale le formule predicative che seguono, usando l'interpretazione descritta sopra, e dire se in questa interpretazione sono vere o no.

3. $\forall x\ (P(x) \vee M(x, 3))$
4. $\exists x \exists y\ M(x, y)$
5. $\forall y\ (M(y, 6) \rightarrow P(y))$

Esercizio 8. (5 punti) Dare la definizione di equipotenza tra due insiemi.