LOGICA MATEMATICA

Canale E–O   a.a. 2006–07

Docente: C. Malvenuto

Primo compito di esonero – 10 novembre 2006

Istruzioni.

- Completare subito la parte inferiore di questa pagina con il proprio nome, cognome e firma.
- Scrivere solamente su questi fogli, anche dietro se occorre, a penna o a matita. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
- Tutte le risposte (tranne dove sono previste risposte multiple) vanno **motivate**.
- Nelle domande con risposte multiple, mettere una croce sulla lettera corrispondente alla risposta esatta.
- **NON PARLARE** pena il ritiro immediato del compito.

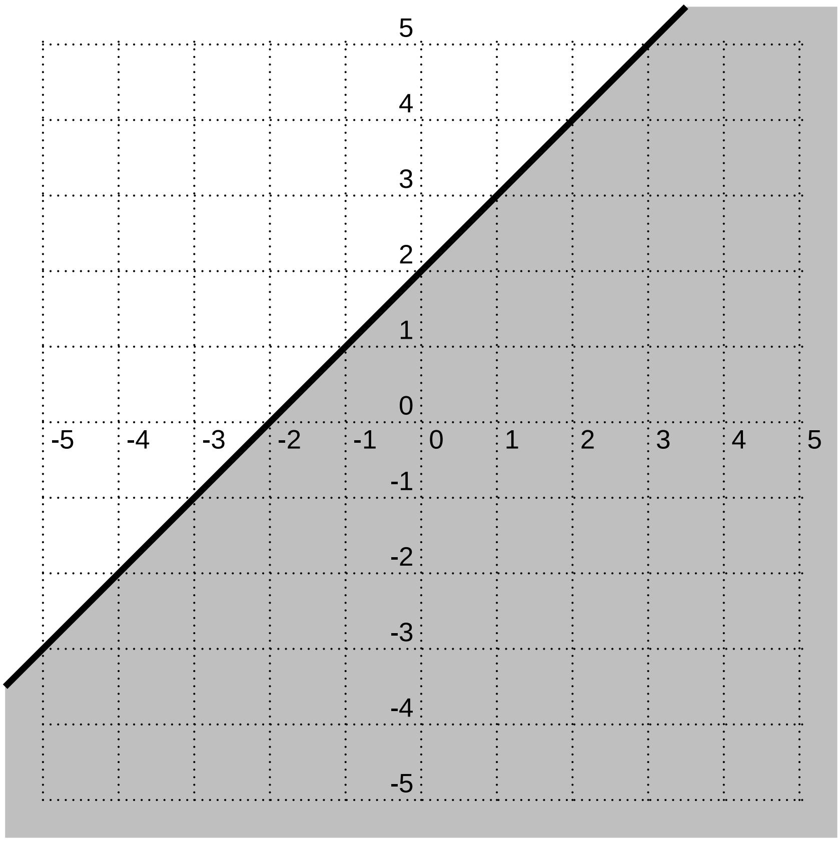
ESERCIZIO	PUNTEGGIO
1	/10
2	/20
3	/15
4	/15
5	/15
6	/5
7	/10
8	/10
TOTALE	/100

Nome e Cognome ↓	**Firma** ↓

Esercizio 1. *(10 punti)* Disegnare, utilizzando il piano cartesiano in figura, il grafico della relazione ρ sull'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali definita da

$$x \rho y \quad \Leftrightarrow \quad y - x \leq 2.$$

Dire inoltre se la relazione è riflessiva e se è simmetrica.



Il grafico della relazione è costituito dai punti nella regione grigia e da quelli della retta disegnata con tratto più scuro. Infatti i punti in relazione sono proprio quelli di coordinate (x, y) tali che $y - x \leq 2$, cioè tali che $y \leq x + 2$; sono quindi i punti della retta di equazione $y = x + 2$ e quelli la cui ordinata y è minore all'ascissa x meno 2.

La relazione è riflessiva perché, scelto comunque x, si ha $x - x = 0$ e 0 è minore di 2, soddisfacendo la definizione della relazione (geometricamente, ciò corrisponde a dire che il grafico include la diagonale $\{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$.)

La relazione non è simmetrica: un controesempio si trova osservando che $4 \rho 1$ perché $1 - 4 = -3 \leq 2$, mentre 1 non è in relazione con 4: infatti, $4 - 1$ non è minore o uguale a 2 (geometricamente, il grafico non è simmetrico rispetto alla retta di equazione $y = x$.)

Esercizio 2. *(20 punti)* Sull'insieme $\mathbb{N}$ sia data la relazione $\sim$ definita da $m \sim n$ se e solo se m e n hanno lo stesso numero di cifre (se scritti nell'usuale notazione decimale).

1. Dimostrare che la relazione $\sim$ è di equivalenza.
2. Descrivere la classe di equivalenza di 32.
3. Descrivere l'insieme quoziente $\mathbb{N}/\sim$ associato alla relazione (cioè descrivere le classi di equivalenza e la partizione associata) e trovare un insieme di rappresentanti per $\mathbb{N}/\sim$.
4. Dimostrare che la relazione non è totale.

1. La relazione data è riflessiva, perché ogni numero ha lo stesso numero di cifre di sé stesso.

   La relazione è simmetrica, perché se m ha lo stesso numero di cifre di n, n avrà lo stesso numero di cifre di m.

   Infine la relazione è transitiva poiché se m e n hanno lo stesso numero di cifre, e n e p hanno lo stesso numero di cifre, ciò vale anche per m e p.

   Quindi, essendo riflessiva, simmetrica e transitiva, la relazione $\sim$ è di equivalenza.

2. Il numero 32 ha due cifre, e quindi la sua classe di equivalenza è costituita da tutti i numeri naturali che si scrivono con due cifre. Quindi si ha $[32]_\sim = \{n : 10 \leq n \leq 99\}$.

3. Per ogni i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, vi è esattamente una classe di equivalenza, quella dei numeri naturali che si scrivono con i cifre. Per ogni classe di equivalenza possiamo prendere come rappresentante il più piccolo elemento che vi compare (ma andrebbe bene qualsiasi altra scelta); possiamo quindi descrivere l'insieme quoziente come $\mathbb{N}/\sim\ = \{[1]_\sim, [10]_\sim, [100]_\sim, [1000]_\sim, \ldots\}$ (le classi di equivalenza sono ovviamente infinite). I naturali sono quindi ripartiti nell'insieme di quelli di una cifra, quelli di due cifre e così via.

4. La relazione sarebbe totale se, presi comunque m e n, valesse $m \sim n$ oppure $n \sim m$. Ma, prendendo due qualsiansi elementi di $\mathbb{N}$ con un numero diverso di cifre (per esempio $m = 5$ e $n = 70$), non è verificata né $m \sim n$ né $n \sim m$.

Esercizio 3. *(15 punti)* Dimostrare che per ogni coppia di insiemi A e B si ha:

$$(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A.$$

Sia $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap B)$; ciò significa che o $x \in A \setminus B$ oppure $x \in A \cap B$. Nel primo caso si ha $x \in A$ e $x \notin B$, e quindi in particolare x è elemento di A. Nel secondo caso si ha $x \in A$ e $x \in B$, e di nuovo si trova che x è in A. In entrambi i casi x appartiene ad A, e quindi $(A \setminus B) \cup (A \cap B) \subseteq A$.

Viceversa, sia x un elemento di A, e consideriamo dove si trova x rispetto all'insieme B: o x è anche elemento di B o no. Nel primo caso, x appartiene sia ad A che a B, e quindi appartiene ad $A \cap B$; nel secondo caso appartiene ad A ma non a B, e quindi appartiene a $A \setminus B$. Visto che queste sono le uniche due possibilità, o x è in $A \cap B$ o è in $A \setminus B$, e così è in $(A \setminus B) \cup (A \cap B)$. Abbiamo quindi che $A \subseteq (A \setminus B) \cup (A \cap B)$.

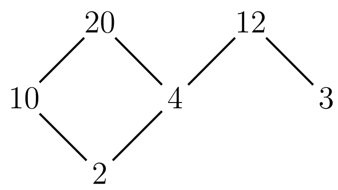
Dato che valgono le sue inclusioni, si ha $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$.

Esercizio 4. *(15 punti)* Considerare sull'insieme $X = \{2, 3, 4, 10, 12, 20\}$ l'ordine parziale della divisibilità tra naturali:

$$a|b \Leftrightarrow \text{ esiste } q \in \mathbb{N} \text{ tale che } b = aq.$$

1. Si disegni il diagramma di Hasse dell'insieme parzialmente ordinato $(X, \mid)$.
2. Si determinino gli insiemi degli elementi minimali e massimali e, se esistono, il massimo e il minimo di $(X, \mid)$.
3. Si scrivano tutte le catene massimali di $(X, \mid)$.

1. Il diagramma richiesto è:



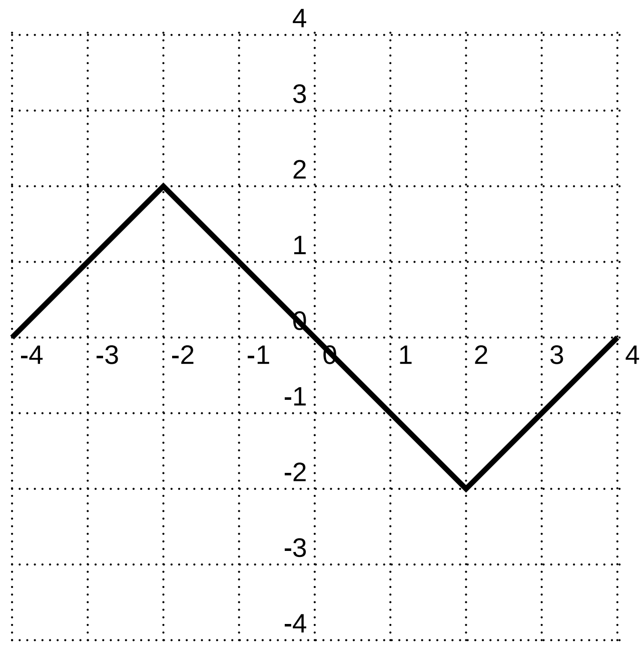
2. Gli elementi minimali sono 2 e 3 (perché nessun elemento di $X \setminus \{2\}$ divide 2, e analogamente per 3); quelli massimali sono 12 e 20 (perché ognuno di essi non è divisore di alcun elemento di X tranne sé stesso).

   Non esiste un massimo perché non esiste un elemento che sia divisibile per ognuno degli altri; analogamente non c'è un minimo perché non c'è un elemento che divida ognuno degli altri. Ad esempio, 2 divide tutti gli elementi di X tranne 3. (In alternativa, dato che c'è più di un elemento massimale non può esserci un massimo, e l'analogo per il minimo.)

3. Le catene massimali di $(X, \mid)$ sono $\{2, 10, 20\}$, $\{2, 4, 20\}$, $\{2, 4, 12\}$ e $\{3, 12\}$.

Esercizio 5. *(15 punti)* Sia data la funzione $f : [-4,4] \to [-4,4]$ il cui grafico è mostrato nella figura.

1. Qual è l'immagine $f([-4,4])$ di f?
2. La funzione f è iniettiva? È suriettiva? È biiettiva?



1. L'immagine di $[-4,4]$, cioè del dominio della funzione f, è per definizione l'insieme di tutti i valori assunti dalla f: dal grafico si vede che essa assume tutti i valori compresi tra -2 e 2 (estremi inclusi). Quindi si ha $f([-4,4]) = [-2,2]$.
2. La funzione f non è iniettiva perché vi sono elementi distinti del dominio su cui la f assume lo stesso valore: per esempio, sia $f(1)$ che $f(3)$ sono uguali a -1.

   La funzione non è suriettiva perché, come già detto, la sua immagine è $[-2,2]$ che non è uguale a tutto il codominio che è $[-4,4]$, per come è stata definita la f. In altre parole, ci sono elementi del codominio che non vengono mai assunti dalla f: per esempio, per nessun elemento x del dominio si ha $f(x) = 3$.

   Non essendo iniettiva né suriettiva, la funzione f non è biiettiva.

Esercizio 6. *(5 punti)* Dare la definizione di elemento massimale e di massimo in un insieme parzialmente ordinato.

Sia X l'insieme parzialmente ordinato e sia "$\leq$" la relazione d'ordine parziale. Un elemento massimale è un elemento x dell'insieme X tale che non esista in X un elemento y differente da x per cui vale $x \leq y$. Un massimo è un elemento x tale che, per ogni y in X, si abbia $y \leq x$.

Esercizio 7. *(10 punti)* Siano $a = \overline{2}$, $b = \overline{3}$ (con $a, b \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$). Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A. $a \cdot b = \overline{1}$;

B. $a \cdot b = \overline{5}$;

C. $a \cdot b = \overline{11}$;

D. $a \cdot b$ non è definito;

E. $a \cdot b = b \cdot a$.

Si ha che $a \cdot b = \overline{6}$, e 6 è congruo sia a 1 che a 11 modulo 5. Quindi, in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $a \cdot b = \overline{6} = \overline{1} = \overline{11}$, e pertanto sono vere la **A.** e la **C.** La **B.** è falsa perché 5 non è congruo a 6 modulo 5. La **D.** è falsa perché il prodotto tra classi resto è sempre definito. Infine, la **E.** è vera perché tale prodotto è commutativo.

Esercizio 8. *(10 punti)* Dati gli insiemi $A = \{x : x \in \mathbb{N}, x \geq 4 \text{ e } x < 7\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A. $|A| > |B|$ **B.** $A \supseteq B$ **C.** $|B| > |A|$ **D.** $A \subseteq B$

E. $A \times B = \{4, 5\}$ **F.** $|A \times B| = 15$ **G.** $5 \in A$ **H.** $\{2\} \in B$

I. Nessuna delle affermazioni che precedono è vera.

L'insieme A è uguale a $\{4, 5, 6\}$ e ha quindi cardinalità 3, mentre l'insieme B ha cardinalità 5. Quindi la **A.** è falsa, mentre la **C.** è vera. Nessuno dei due include l'altro, e quindi sia la **B.** che la **D.** sono false. Gli elementi del prodotto cartesiano $A \times B$ sono coppie di numeri e non singoli numeri, e quindi la **E.** non può essere sicuramente vera; per l'ordine del prodotto cartesiano si ha $|A \times B| = |A||B| = 3 \cdot 5 = 15$; perciò la **F.** è vera. La **G.** è vera perché 5 è effettivamente un elemento di A, mentre il singleton $\{2\}$ non è elemento di B, e così la **H.** è falsa.