LOGICA MATEMATICA

Canale E–O   a.a. 2006–07

Docente: C. Malvenuto

Secondo compito di esonero – 17 gennaio 2007

Istruzioni.

- Completare subito la parte inferiore di questa pagina con il proprio nome, cognome e firma.
- Scrivere solamente su questi fogli, anche dietro se occorre, a penna o a matita. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
- Tutte le risposte (tranne dove sono previste risposte multiple) vanno **motivate**.
- Nelle domande con risposte multiple, mettere una croce sulla lettera corrispondente alla risposta esatta.
- **NON PARLARE** pena il ritiro immediato del compito.

ESERCIZIO	PUNTEGGIO
1	/10
2	/15
3	/15
4	/15
5	/10
6	/20
7	/10
8	/5
TOTALE	/100

Nome e Cognome ↓	**Firma** ↓

Esercizio 1. *(10 punti)* Dimostrare per induzione che, per ogni naturale $n \geq 1$, vale:

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1.$$

(Passo base) Per $n = 1$ l'uguaglianza è verificata: infatti diviene $2^0 = 2^1 - 1$, in cui entrambi i membri sono uguali a 1.

(Ipotesi induttiva) Sia $n \geq 1$ tale che l'uguaglianza sia verificata, cioè tale che valga $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1$.

(Passo induttivo) Mostriamo che l'uguaglianza vale anche quando si sostituisce n con $n + 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} 2^i &= \sum_{i=0}^{n-1} 2^i + 2^n \\ &= 2^n - 1 + 2^n \\ &= 2 \cdot 2^n - 1 \\ &= 2^{n+1} - 1.\end{aligned}$$

Sostituendo n con $n + 1$ nel secondo membro dell'uguaglianza da verificare si trova:

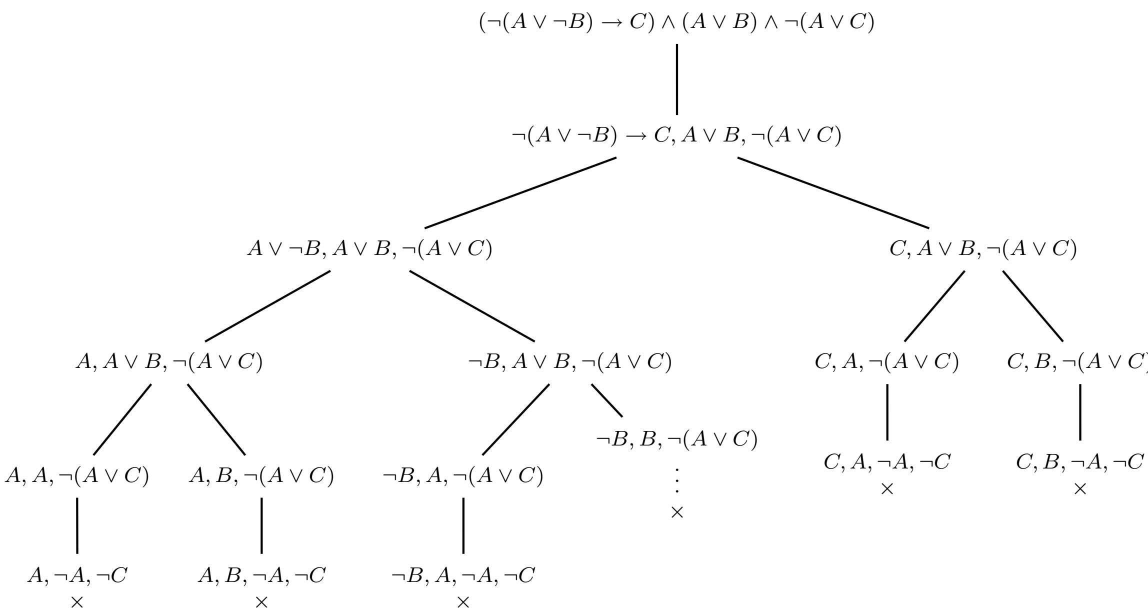
$$2^{n+1} - 1,$$

come volevamo.

Esercizio 2. *(15 punti)* Verificare con il metodo dei tableau semantici che la formula proposizionale che segue è insoddisfacibile:

$$(\neg(A \vee \neg B) \to C) \wedge (A \vee B) \wedge \neg(A \vee C).$$

Costruiamo il tableau semantico che ha come radice la formula data; se tutte le foglie risulteranno chiuse, avremo verificato che la formula data è insoddisfacibile.



Tutte le foglie sono chiuse (cioè sono etichettate con insiemi di letterali contraddittori), come richiesto.

Esercizio 3. *(15 punti)* Usando un metodo a scelta e motivando la risposta, dire se la formula

$$(\neg p \wedge q) \vee r \rightarrow \neg p \vee (q \wedge r)$$

- è valida
- è insoddisfacibile
- è sia soddisfacibile che falsificabile

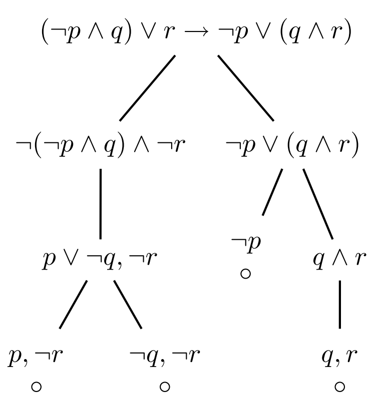
Se esistono interpretazioni che rendono vera la formula, descriverne una.

1° metodo Sia $\mathcal{F}$ la formula data. Possiamo costruire la tavola di verità della $\mathcal{F}$:

p	q	r	$\neg p \wedge q$	$(\neg p \wedge q) \vee r$	$q \wedge r$	$\neg p \vee (q \wedge r)$	$\mathcal{F}$
1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	1	1

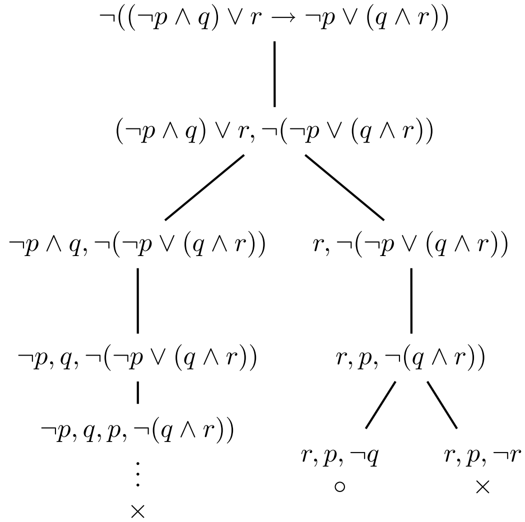
La presenza nella colonna corrispondente all'intera formula sia di valori di verità uguali a 1 che di un valore uguale a 0 dice che la formula è sia soddisfacibile che falsificabile. A ogni riga in cui nell'ultima colonna compare un 1 corrisponde un'interpretazione che rende vera la formula; possiamo considerare per esempio la prima, ottenendo l'interpretazione $v(p) = v(q) = v(r) = 1$.

2° metodo Cominciamo col costruire il tableau semantico che ha come radice la $\mathcal{F}$.



Osserviamo che tutte le foglie sono aperte; abbiamo così trovato alcune interpretazioni per la formula data, che è perciò soddisfacibile. Per esempio, un'interpretazione che la rende vera è quella data dalla foglia più a sinistra, quella corrispondente a $v(p) = 1$, $v(r) = 0$ e un'assegnazione qualsiasi a q, per esempio $v(q) = 0$.

Non sappiamo ancora se la formula sia valida. Per appurarlo, consideriamo il tableau relativo alla negazione della formula data.



Abbiamo così trovato anche un'interpretazione che rende vera la negazione di $\mathcal{F}$, cioè che rende falsa $\mathcal{F}$: $v(r) = v(p) = 1$ e $v(q) = 0$ (si confronti, nel metodo precedente, con la riga in cui compare 0 nella colonna relativa a $\mathcal{F}$). Quindi la formula data è sia soddisfacibile che falsificabile.

Esercizio 4. *(15 punti)* Dimostrare, usando il metodo dei tableau semantici nel caso predicativo, che la formula che segue è valida:

$$(\forall x\ \neg P(x)) \to (\forall x\ (P(x) \to Q(x))).$$

Costruiamo il tableau semantico relativo alla negazione della formula $\mathcal{F}$ data. Troveremo che tutte le foglie sono chiuse, il che significa che non vi sono modelli per $\neg\mathcal{F}$, cioè interpretazioni che rendono falsa la $\mathcal{F}$, che quindi è valida.

$$\neg((\forall x\ \neg P(x)) \to (\forall x\ (P(x) \to Q(x))))$$

$$\forall x\ \neg P(x), \neg\forall x\ (P(x) \to Q(x))$$

$$\forall x\ \neg P(x), \exists x\ \neg(P(x) \to Q(x))$$

$$\exists : a$$

$$\forall x\ \neg P(x), \neg(P(a) \to Q(a))$$

$$\forall x\ \neg P(x), P(a), \neg Q(a)$$

$$\forall : a$$

$$\neg P(a), P(a), \neg Q(a)$$

$$\times$$

(Si noti che la formula data è una delle formulazioni del principio che da un'affermazione falsa si può ottenere qualsiasi conseguenza. Infatti essa afferma che se il predicato $P(x)$ è falso per ogni x, allora è sempre vera un'implicazione che ha $P(x)$ come premessa.)

Esercizio 5. *(10 punti)* Data la formula proposizionale $A = (p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$, determinare una formula A' logicamente equivalente ad A che contenga solo i connettivi $\neg$ e $\wedge$.

Usando equivalenze note ($a \rightarrow b \equiv \neg a \vee b$ e le leggi di de Morgan), il fatto che l'equivalenza logica è transitiva e le proprietà della sostituzione, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}(p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q) &\equiv \neg(p \vee q) \vee (\neg p \rightarrow q)\\ &\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \vee q)\\ &\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee \neg(\neg p \wedge \neg q)\\ &\equiv \neg(\neg(\neg p \wedge \neg q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)),\end{aligned}$$

che è della forma cercata.

(Si osservi per inciso che la formula ottenuta, e quindi quella di partenza, è valida perché è della forma $\neg(F \wedge \neg F)$.)

Esercizio 6. *(20 punti)* Formalizzare le seguenti frasi nel linguaggio del calcolo dei predicati. Si usino i predicati $U(x)$ con il significato di "x è un utente", $P(y)$ con il significato di "y è un programma" e $A(z, w)$ con il significato di "z adopera w". Per esempio, la frase *Tutti gli utenti usano il programma* Q può essere formalizzata come $P(Q) \wedge \forall x\ (U(x) \rightarrow A(x, Q))$.

1. R è un programma.
2. Gli utenti che adoperano il programma Q adoperano anche il programma R.
3. Qualche utente usa il programma Q, ma l'utente D no.
4. C'è un programma che non viene usato da nessun utente.
5. L'utente E usa tutti i programmi usati dall'utente F.

Tradurre in linguaggio naturale le formule predicative che seguono, usando l'interpretazione descritta sopra.

6. $U(H)$
7. $\exists x\ (U(x) \wedge \forall y\ (P(y) \rightarrow A(x, y)))$
8. $\forall x\ ((U(x) \wedge A(x, Q)) \rightarrow \neg A(x, R))$

Sempre nella stessa interpretazione, definire a parole i seguenti insiemi:

9. $X = \{x\ :\ U(x) \wedge A(x, Q) \wedge (A(x, R) \vee A(x, S))\}$
10. $Y = \{x\ :\ P(x) \wedge \exists y\ (U(y) \wedge A(y, x))\}$

1. $P(R)$
2. $P(Q) \wedge P(R) \wedge \forall x\ ((U(x) \wedge A(x, Q)) \rightarrow A(x, R))$
3. $P(Q) \wedge \exists x\ (U(x) \wedge A(x, Q)) \wedge U(D) \wedge \neg A(D, Q)$
4. $\exists x\ (P(x) \wedge \forall y\ (U(y) \rightarrow \neg A(y, x)))$
5. $U(E) \wedge U(F) \wedge \forall x\ ((P(x) \wedge A(F, x)) \rightarrow A(E, x))$
6. H è un utente.
7. C'è un utente che adopera tutti i programmi.
8. Ogni utente che adopera Q non adopera R (cioè nessun utente usa sia Q che R).
9. L'insieme degli utenti che adoperano Q e (almeno) uno tra R e S.
10. L'insieme dei programmi usati da almeno un utente.

Esercizio 7. *(10 punti)* L'insieme dei numeri interi positivi divisibili per 3 e quello dei numeri interi negativi dispari hanno la stessa cardinalità? Perché?

Gli insiemi dati hanno la stessa cardinalità, quella del numerabile; infatti è possibile, per ognuno dei due, dare una biiezione tra esso e l'insieme $\mathbb{N}^*$ dei naturali (escluso lo zero). Se al numero $3k$, intero positivo divisibile per 3, facciamo corrispondere l'intero k, abbiamo una biiezione dal primo degli insiemi dati a $\mathbb{N}^*$ (iniettività: $k = h$ implica $3k = 3h$; suriettività: ogni intero h è immagine appunto di $3h$). Analogamente, otteniamo una biiezione dall'insieme degli interi negativi dispari a $\mathbb{N}^*$, mandando il generico elemento $-(2k-1)$ (per $k = 1, 2, 3, \ldots$) in k.

Essendo entrambi gli insiemi dati in biiezione con uno stesso insieme, lo sono tra di loro e quindi hanno la stessa cardinalità.

Esercizio 8. *(5 punti)* Dare la definizione di equipotenza tra due insiemi.

Due insiemi A e B si dicono equipotenti se esiste una biiezione da A a B, cioè un'applicazione $f : A \to B$ iniettiva e suriettiva.