LOGICA MATEMATICA

Canale E–O a.a. 2007–08

Docente: C. Malvenuto

Primo compito di esonero – 14 novembre 2007

Istruzioni.

- Completare subito la parte inferiore di questa pagina con il proprio nome, cognome e firma.
- Scrivere solamente su questi fogli, anche dietro se occorre, a penna o a matita. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
- Tutte le risposte (tranne dove sono previste risposte multiple) vanno **motivate**.
- Nelle domande con risposte multiple, mettere una croce sulla lettera corrispondente alla risposta esatta.
- **NON PARLARE** pena il ritiro immediato del compito.

ESERCIZIO	PUNTEGGIO
1	/15
2	/15
3	/15
4	/15
5	/15
6	/15
7	/5
8	/5
TOTALE	/100

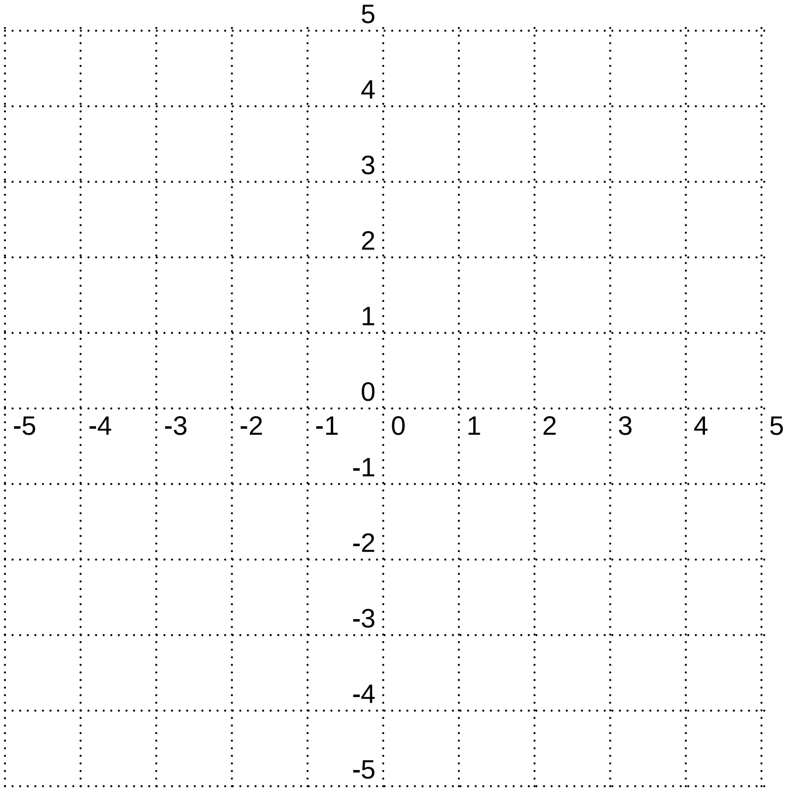
Nome e Cognome ↓	**Firma ↓**

Esercizio 1. *(15 punti)* Siano A, B, C e D insiemi. Dimostrare che se $A \subseteq B$ e $C \subseteq D$, allora si ha
$$A \cup C \subseteq B \cup D.$$

Esercizio 2. *(15 punti)* Disegnare, utilizzando il piano cartesiano in figura, il grafico della relazione ρ sull'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali definita da

$$x\rho y \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leq y - x < 3.$$

Dire inoltre se la relazione è riflessiva e se è simmetrica.



Esercizio 3. *(15 punti)* Sia data la seguente relazione sull'insieme $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ delle coppie di numeri reali definita da

$$(x, y) \sim (u, v) \Leftrightarrow x = u.$$

1. Dimostrare che $\sim$ è una relazione d'equivalenza.
2. Descrivere la classe di equivalenza dell'elemento $(4, 7)$ e interpretarla geometricamente. Descrivere inoltre l'insieme quoziente $A/\sim$ associato alla relazione (cioè descrivere le classi di equivalenza e la partizione associata).
3. Trovare un insieme di rappresentanti per $A/\sim$.

Esercizio 4. *(15 punti)* Per ognuna delle seguenti corrispondenze dire se è una funzione, e in caso positivo determinare se è iniettiva e se è suriettiva.

1. $f : \mathbb{Z} \to \{a, b\}$ definita da $f(x) = a$ se x è un multiplo di 3, $f(x) = b$ se x è un multiplo di 5;
2. $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definita da $f(x) = 3x + 5$;
3. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita da $f(x) = 3x + 5$.

Esercizio 5. *(15 punti)* Sia $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X. Sia $f : \mathcal{P}(X) \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ l'applicazione che manda ogni sottoinsieme di X nella sua cardinalità cioè, se $A \subseteq X$,

$$f(A) = |A|.$$

(Per esempio, $f(\{1, 4\}) = 2$.)

1. Dire se l'applicazione f è iniettiva, suriettiva, biunivoca.
2. Determinare $f^{-1}(1)$ e $f^{-1}(3)$.

Esercizio 6. *(15 punti)* Dimostrare per induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq 1$, vale l'uguaglianza

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Esercizio 7. *(5 punti)* Dare la definizione di catena, di catena satura e di anticatena in un insieme X dotato di una relazione d'ordine $\preceq$.

Esercizio 8. *(5 punti)* Dare la definizione di classe di equivalenza e di insieme quoziente per una relazione di equivalenza $\sim$ su un insieme X.