

# METODI MATEMATICI PER L'INFORMATICA

CANALE E-O A.A. 2009-10

**Docente: C. Malvenuto**

COMPITO DI ESAME – 1 MARZO 2010

## Istruzioni.

- Completare subito la parte inferiore di questa pagina con il proprio nome, cognome e firma.
- Scrivere solamente su questi fogli, anche dietro se occorre, a penna o a matita. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
- **Tutte le risposte vanno motivate.**
- **NON PARLARE** pena il ritiro immediato del compito.

ESERCIZIO	PUNTEGGIO
1	/15
2	/10
3	/15
4	/15
5	/15
6	/10
7	/15
8	/5
TOTALE	/100

Nome e Cognome ↓	Firma ↓

**Esercizio 1.** (15 punti) Sia  $R$  la relazione definita su  $\mathbb{N}$  da:

$mRn$  se e solo se  $m$  o  $n$  (o entrambi) sono multipli di 3.

Quali proprietà (riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva, totale) soddisfa la relazione  $R$  e quali non soddisfa? È una relazione di equivalenza? È una relazione d'ordine?

---

**Esercizio 2.** (10 punti) Sia  $X$  un insieme qualsiasi e siano  $A$ ,  $B$  e  $C$  suoi sottoinsiemi. Dimostrare che vale la legge distributiva  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

---

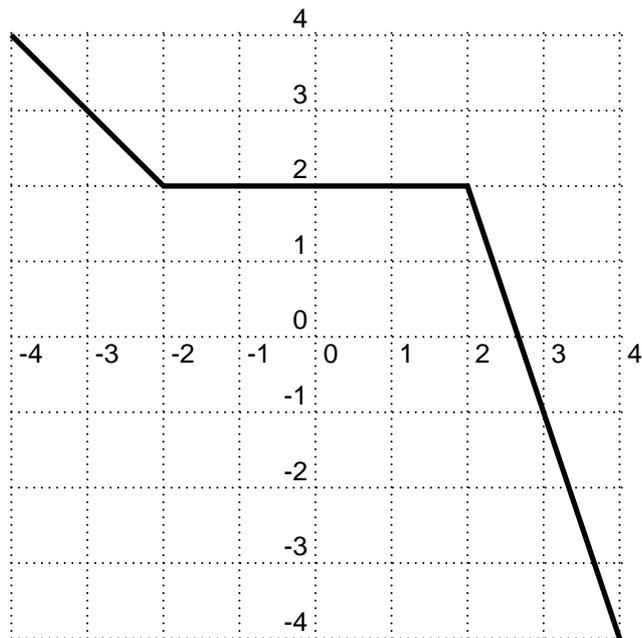
**Esercizio 3.** (15 punti) Dimostrare per induzione che per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 0$ , vale l'uguaglianza

$$\sum_{i=0}^n (4i + 1) = (2n + 1)(n + 1).$$

---

**Esercizio 4.** (15 punti) Sia data la funzione  $f : [-4, 4] \rightarrow [-4, 4]$  il cui grafico è mostrato nella figura.

1. Qual è l'immagine  $f([-4, 4])$  di  $f$ ?
2. Qual è la controimmagine  $f^{-1}(-1)$  dell'elemento  $-1$ ? Qual è la controimmagine  $f^{-1}(2)$  dell'elemento  $2$ ?
3. La funzione  $f$  è iniettiva? È suriettiva? È biiettiva?



**Esercizio 5.** (15 punti) Verificare, usando il metodo dei tableau, che il seguente insieme di enunciati non è soddisfacibile:  $\{\neg(A \rightarrow B), (C \vee \neg A) \vee B, \neg C \vee (\neg C \wedge A)\}$ .

---

**Esercizio 6.** (10 punti) Data la formula proposizionale  $A = (p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$ , determinare una formula  $A'$  logicamente equivalente ad  $A$  che contenga solo i connettivi  $\neg$  e  $\wedge$ .

---

**Esercizio 7.** (15 punti) Dato il linguaggio del calcolo dei predicati con i simboli per predicati  $\text{Pa}$  e  $\text{Pe}$ , e gli usuali simboli per variabili e costanti, se ne consideri l'interpretazione il cui dominio è l'insieme delle rette nel piano, e in cui interpretiamo  $\text{Pa}(x, y)$  come “la retta  $x$  è parallela alla retta  $y$ ” e  $\text{Pe}(x, y)$  come “la retta  $x$  è perpendicolare alla retta  $y$ ”. Per esempio, interpretiamo la formula  $\forall y \exists x \text{Pe}(x, y)$  come “Per ogni retta  $c$  c'è una retta che le è perpendicolare”.

Formalizzare le seguenti frasi nel linguaggio del calcolo dei predicati.

1. Ogni retta è parallela ad essa stessa.
2. Esistono due rette di cui la prima è perpendicolare alla seconda.
3. Se due rette sono entrambe perpendicolari a una terza, allora sono parallele tra loro.

Tradurre in linguaggio naturale le formule predicative che seguono, usando l'interpretazione descritta sopra, e dire se in questa interpretazione sono vere o no.

4.  $\forall x \forall y (\text{Pa}(x, y) \rightarrow \text{Pa}(y, x))$
  5.  $\exists x \forall y \text{Pe}(x, y)$
-

**Esercizio 8.** (5 punti) Dimostrare che l'insieme  $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  delle terne di numeri interi e l'insieme  $\mathbb{N}$  sono equipotenti.

---