

METODI MATEMATICI PER L'INFORMATICA

CANALE E-O A.A. 2008-09

Docente: C. Malvenuto

COMPITO DI ESAME – 1 LUGLIO 2009

Istruzioni.

- Completare subito la parte inferiore di questa pagina con il proprio nome, cognome e firma.
- Scrivere solamente su questi fogli, anche dietro se occorre, a penna o a matita. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
- Tutte le risposte vanno **motivate**.
- **NON PARLARE** pena il ritiro immediato del compito.

ESERCIZIO	PUNTEGGIO
1	/15
2	/10
3	/10
4	/15
5	/15
6	/15
7	/10
8	/10
TOTALE	/100

Nome e Cognome ↓	Firma ↓

Esercizio 1. (15 punti) Sia X l'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$ e sia \mathcal{F} la seguente famiglia di sottoinsiemi di X :

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}.$$

Su \mathcal{F} sia definita la relazione ρ data da:

$$A\rho B \text{ se e solo se } |A| \leq |B|.$$

Quali proprietà (riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva, totale) soddisfa la relazione ρ ?

Scrivere tutti i B per i quali vale $\{1, 2, 3\}\rho B$.

È una relazione di equivalenza? È una relazione d'ordine?

Esercizio 2. (10 punti) Indichiamo con $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'insieme delle classi resto modulo n .

1. Esistono due elementi di $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ tali che il loro prodotto sia $\bar{0}$? Perché?
2. Esistono due elementi di $\mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$ tali che il loro prodotto sia $\bar{0}$? Perché?

(Non calcolate tutti i prodotti possibili, ovviamente)

Esercizio 3. (10 punti) Siano A e B sottoinsiemi di un insieme S . Dimostrare che

$$A \setminus B' = A \cap B,$$

dove $X' = S \setminus X$ denota il complementare di X in S .

Esercizio 4. (15 punti) Dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, si ha

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

Esercizio 5. (15 punti) Sia f una funzione da \mathbb{Q} a \mathbb{R} di cui si sa che $f(0) = f(1)$.

Con i dati a disposizione è possibile dire se f è iniettiva? se è suriettiva? se è biiettiva?

Esercizio 6. (15 punti) Si usi il metodo dei tableau semantici per determinare se la formula C è conseguenza logica dell'insieme di formule $\{\neg(A \vee B) \vee C, \neg A, \neg(\neg B \vee C)\}$.

Esercizio 7. (10 punti) Usando un metodo a scelta determinare se la seguente formula proposizionale è una tautologia:

$$A \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))).$$

Esercizio 8. (10 punti) Interpretiamo il predicato binario $A(x, y)$ come “la retta x è parallela alla retta y ” e il predicato $B(x, y)$ come “la retta x è perpendicolare alla retta y ”.

Scrivere frasi italiane corrispondenti all’interpretazione delle seguenti formule predicative:

- $\forall x \forall y (B(x, y) \rightarrow (\exists z (A(x, z) \wedge A(y, z))))$;
- $\forall x \exists y (\neg A(x, y))$.

Formalizzare nel linguaggio del calcolo dei predicati le seguenti affermazioni:

- Esiste una retta perpendicolare a sé stessa.
 - Date due rette, se la prima è parallela alla seconda, allora non le è perpendicolare.
-