METODI MATEMATICI PER L'INFORMATICA

Canale E–O a.a. 2009–10

Docente: C. Malvenuto

Compito di esame – 15 settembre 2010

Istruzioni.

- Completare subito la parte inferiore di questa pagina con il proprio nome, cognome e firma.
- Scrivere solamente su questi fogli, anche dietro se occorre, a penna o a matita. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
- **Tutte le risposte vanno motivate**.
- **NON PARLARE** pena il ritiro immediato del compito.

ESERCIZIO	PUNTEGGIO
1	/15
2	/15
3	/15
4	/20
5	/15
6	/20
TOTALE	/100

Nome e Cognome ↓	**Firma ↓**

Esercizio 1. *(15 punti)* Si consideri l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi, e la relazione ρ su $\mathbb{Z}$ così definita:

$$m \, \rho \, n \text{ se e solo se } m + n = 10.$$

Quali proprietà (riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva, totale) soddisfa la relazione ρ e quali non soddisfa? È una relazione di equivalenza? È una relazione d'ordine? Trovare, se esiste, un elemento $x \in \mathbb{Z}$ per cui valga $x \, \rho \, x$. Quanti sono gli elementi y per i quali vale $12 \, \rho \, y$?

Esercizio 2. *(15 punti)* Sia dato l'insieme $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e la famiglia di sottoinsiemi $X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}\}$; su X si consideri l'ordine parziale dato dall'inclusione insiemistica $\subseteq$.

1. Si disegni il diagramma di Hasse dell'insieme parzialmente ordinato $(X, \subseteq)$.
2. Si determinino gli insiemi degli elementi minimali e massimali e, se esistono, il massimo e il minimo di $(X, \subseteq)$.
3. Si scrivano una catena massimale e una catena non massimale di $(X, \subseteq)$.

Esercizio 3. *(15 punti)* Si considerino gli insiemi $A = \{x : x \in \mathbb{R}, 1 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x : x \in \mathbb{Q}, 1 \leq x \leq 2\}$, $C = \{1 + 1/n : n \in \mathbb{N}\}$.

1. Gli insiemi A e B sono equipotenti?

2. Gli insiemi A e C sono equipotenti?

3. Gli insiemi B e C sono equipotenti?

Esercizio 4. *(20 punti)* Se (a_i) è la successione definita ricorsivamente da $a_1 = 5$, $a_2 = 11$, $a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$, dimostrare che per ogni $n \geq 1$ si ha $a_n = 2^{n+1} + 3^{n-1}$.

Esercizio 5. *(15 punti)* Usando un metodo a scelta dimostrare che il seguente insieme di formule è soddisfacibile e darne un modello:

$$\{A \leftrightarrow B, C \to B, \neg A \vee C\}.$$

Esercizio 6. *(20 punti)* Sia dato il linguaggio del calcolo dei predicati con gli usuali simboli per variabili e costanti, con i simboli $=$ e D per designare due predicati binari.

Si consideri l'interpretazione di questo linguaggio il cui dominio è l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi, e in cui interpretiamo $=$ come l'usuale uguaglianza, e $\mathsf{D}(m, n)$ come "m divide n", cioè "esiste un numero intero k tale che $mk = n$"; equivalentemente, "n è un multiplo di m". Per esempio, interpretiamo la formula $\exists b \forall a (((a = 3) \vee (a = 7)) \rightarrow \neg(\mathsf{D}(a, b)))$ come "esiste un numero b tale che, se un numero a è uguale a 3 o a 7, a non divide b" (o più semplicemente "esiste un numero non divisibile per 3 né per 7").

Formalizzare le seguenti frasi in questo linguaggio.

1. Ogni numero è un multiplo di sé stesso.

2. Esistono due numeri distinti nessuno dei quali divide l'altro.

3. 5 è un numero primo.

Tradurre in linguaggio naturale le formule predicative che seguono, usando l'interpretazione descritta sopra, e dire se in questa interpretazione sono vere o no.

4. $\forall x \; \forall y \; (\mathsf{D}(x, y) \rightarrow \mathsf{D}(y, x))$

5. $\exists x \; \forall y \; \mathsf{D}(x, y)$