

METODI MATEMATICI PER L'INFORMATICA

CANALE E-O A.A. 2008-09

Docente: C. Malvenuto

COMPITO DI ESAME – 18 SETTEMBRE 2009

Istruzioni.

- Completare subito la parte inferiore di questa pagina con il proprio nome, cognome e firma.
- Scrivere solamente su questi fogli, anche dietro se occorre, a penna o a matita. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
- **Tutte le risposte vanno motivate.**
- **NON PARLARE** pena il ritiro immediato del compito.

ESERCIZIO	PUNTEGGIO
1	/15
2	/15
3	/10
4	/15
5	/10
6	/10
7	/10
8	/15
TOTALE	/100

Nome e Cognome ↓	Firma ↓

Esercizio 1. (15 punti) Sia $A = \{x, y, z\}$ un insieme e sia

$$R = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (y, z), (x, z)\}$$

una relazione su A . Quali proprietà (riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva, totale) soddisfa la relazione R ?

È una relazione di equivalenza? È una relazione d'ordine?

Esercizio 2. (15 punti) Sia X l'insieme composto da tutte le possibili terne (a, b, c) in cui a è un numero intero, b è un numero razionale e c è un numero reale. Qual è la cardinalità di X ?

Esercizio 3. (10 punti) Sia dato l'insieme $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Per ognuno dei seguenti insiemi dire se è uguale ad A . Se non lo è, descriverlo.

$$B = \{x : x \in \mathbb{N} \text{ tali che } x \geq 2 \text{ oppure } x \leq 6\}$$

$$C = \{x : x \in \mathbb{N} \text{ tali che } x \geq 2 \text{ e } x \leq 6\}$$

$$D = A \cap A$$

$$E = B \cap C$$

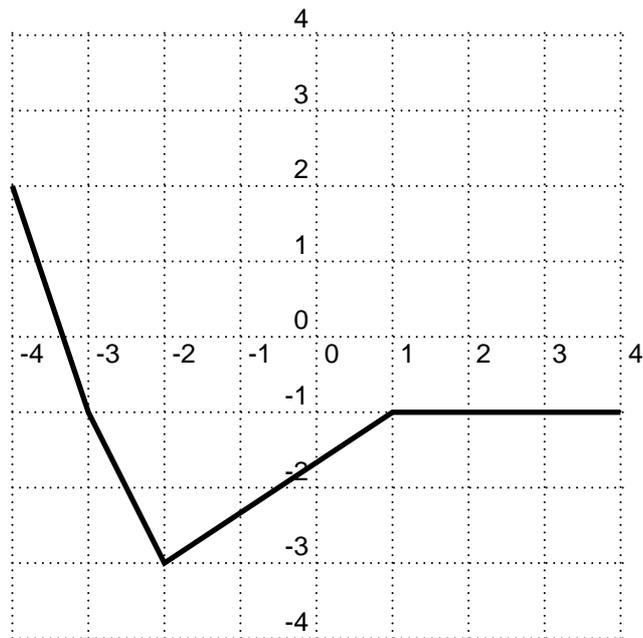
$$F = \{\{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$$

Esercizio 4. (15 punti) Dimostrare per induzione che per ogni numero naturale n maggiore di 0 si ha:

$$\sum_{k=2}^{2n+1} (3k - 1) = n(6n + 7).$$

Esercizio 5. (10 punti) Sia data la funzione $f : [-4, 4] \rightarrow [-4, 4]$ il cui grafico è mostrato nella figura.

1. Qual è l'immagine $f([-4, 4])$ di f ?
2. Qual è la controimmagine $f^{-1}(-1)$ dell'elemento -1 ? Qual è la controimmagine $f^{-1}(4)$ dell'elemento 4 ?
3. La funzione f è iniettiva? È suriettiva? È biiettiva?



Esercizio 6. (10 punti) Si usi il metodo dei tableau semantici per determinare se la formula che segue è una tautologia:

$$(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow (\neg p \vee (q \wedge p)).$$

Esercizio 7. (10 punti) Usando un metodo a scelta dimostrare che la seguente formula proposizionale è una tautologia:

$$\neg q \rightarrow [(p \rightarrow (\neg q \vee r)) \vee (r \rightarrow \neg r)].$$

(Suggerimento: Pensateci su un momento, anziché cominciare a scrivere meccanicamente tavole di verità o tableau.)

Esercizio 8. (15 punti) Supponiamo di avere alcune carte speciali ognuna delle quali presenta su una faccia un numero e sull'altra una lettera. Non sappiamo se ci sia un criterio che collega tra loro lettere e numeri, ma congetturiamo che valga la seguente regola:

se una carta presenta un numero pari su una faccia, allora presenta una vocale sull'altra faccia.

In questo momento vediamo posate sul tavolo una carta che mostra una A, una carta che mostra una B, una carta che mostra il numero 4 e una carta che mostra il numero 5. Qual è il minimo numero di carte che dobbiamo girare per verificare se la nostra congettura è confermata, quali sono queste carte e perché?
