LOGICA MATEMATICA

Canale E–O a.a. 2006–07

Docente: C. Malvenuto

Compito di esame – 23 febbraio 2007

Istruzioni.

- Completare subito la parte inferiore di questa pagina con il proprio nome, cognome e firma.
- Scrivere solamente su questi fogli, anche dietro se occorre, a penna o a matita. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
- Tutte le risposte vanno **motivate**.
- Nelle domande con risposte multiple, mettere una croce sulla lettera corrispondente alla risposta esatta.
- **NON PARLARE** pena il ritiro immediato del compito.

ESERCIZIO	PUNTEGGIO
1	/15
2	/10
3	/15
4	/15
5	/15
6	/10
7	/15
8	/5
TOTALE	/100

Nome e Cognome ↓	**Firma** ↓

Esercizio 1. (15 punti) Sia R la relazione definita su $\mathbb{N}$ da:

mRn se e solo se m o n (o entrambi) sono multipli di 3.

Quali proprietà (riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva, totale) soddisfa la relazione R? È una relazione di equivalenza? È una relazione d'ordine?

Esercizio 2. (10 punti)

1. Sia X un insieme qualsiasi e siano A, B e C suoi sottoinsiemi. Dimostrare che vale la legge distributiva $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

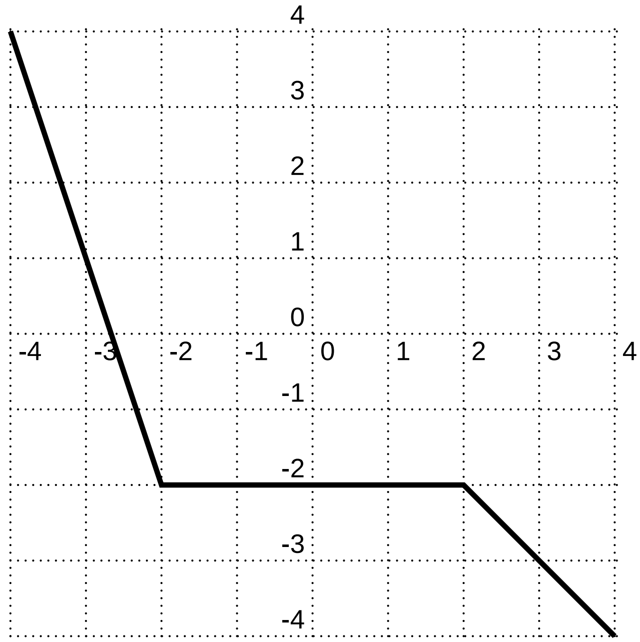
2. Nel caso in cui X sia l'insieme degli interi, e siano $A = \{3, 6, 7, 9\}$, $B = \{x : x \in X,\ x \text{ è pari}\}$ e $C = \{x : x \in X,\ 4 < x \leq 11\}$, elencare gli elementi di $A \cup (B \cap C)$ e quelli di $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Esercizio 3. (15 punti) Dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$, vale l'uguaglianza

$$\sum_{i=0}^{n}(4i+1) = (2n+1)(n+1).$$

Esercizio 4. (15 punti) Sia data la funzione $f : [-4, 4] \to [-4, 4]$ il cui grafico è mostrato nella figura.

1. Qual è l'immagine $f([-4, 4])$ di f?
2. Qual è la controimmagine $f^{-1}(1)$ dell'elemento 1? Qual è la controimmagine $f^{-1}(-2)$ dell'elemento -2?
3. La funzione f è iniettiva? È suriettiva? È biiettiva?



Esercizio 5. (15 punti) Verificare, usando il metodo dei tableau, che il seguente insieme di enunciati non è soddisfacibile: $\{\neg(A \to B),\ (C \vee \neg A) \vee B,\ \neg C \vee (\neg C \wedge A)\}$.

Esercizio 6. (10 punti) Sia dato l'insieme di formule predicative

$$\{\exists x\ P(x),\ \exists x\ Q(x),\ \neg\forall x\ (P(x) \land Q(x))\}.$$

Usando il metodo dei tableau semantici nel caso predicativo verificare che esso è soddisfacibile ed esplicitarne un modello.

Esercizio 7. (15 punti) Dato il linguaggio del calcolo dei predicati con i simboli per predicati Pa e Pe, e gli usuali simboli per variabili e costanti, se ne consideri l'interpretazione il cui dominio è l'insieme delle rette nel piano, e in cui interpretiamo $\mathsf{Pa}(x, y)$ come "la retta x è parallela alla retta y" e $\mathsf{Pe}(x, y)$ come "la retta x è perpendicolare alla retta y". Per esempio, interpretiamo la formula $\forall y \, \exists x \, \mathsf{Pe}(x, y)$ come "Per ogni retta c'è una retta che le è perpendicolare".

Formalizzare le seguenti frasi nel linguaggio del calcolo dei predicati.

1. Ogni retta è parallela ad essa stessa.

2. Esistono due rette di cui la seconda è perpendicolare alla prima.

3. Se due rette sono entrambe perpendicolari a una terza, allora sono parallele tra loro.

Tradurre in linguaggio naturale le formule predicative che seguono, usando l'interpretazione descritta sopra, e dire se in questa interpretazione sono vere o no.

4. $\forall x \, \forall y \, (\mathsf{Pa}(x, y) \rightarrow \mathsf{Pa}(y, x))$

5. $\exists x \, \forall y \, \mathsf{Pe}(x, y)$

Esercizio 8. (5 punti) Dimostrare che l'insieme $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ delle terne di numeri interi e l'insieme $\mathbb{N}$ sono equipotenti.