LOGICA MATEMATICA

Canale E–O   a.a. 2006–07

Docente: C. Malvenuto

Compito di esame – 2 luglio 2007

Istruzioni.

- Completare subito la parte inferiore di questa pagina con il proprio nome, cognome e firma.
- Scrivere solamente su questi fogli, anche dietro se occorre, a penna o a matita. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
- Tutte le risposte vanno **motivate**.
- Nelle domande con risposte multiple, mettere una croce sulla lettera corrispondente alla risposta esatta.
- **NON PARLARE** pena il ritiro immediato del compito.

ESERCIZIO	PUNTEGGIO
1	/10
2	/10
3	/15
4	/15
5	/10
6	/15
7	/15
8	/10
TOTALE	/100

Nome e Cognome ↓	**Firma** ↓

Esercizio 1. (10 punti) Sia R la relazione definita su $\mathbb{Z}$ da:

$$aRb \text{ se e solo se } a + b = 10.$$

Quali proprietà (riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva, totale) soddisfa la relazione R? È una relazione di equivalenza? È una relazione d'ordine?

Esercizio 2. (10 punti)

1. Usando l'algoritmo di Euclide, trovare il massimo comun divisore d di 63 e 364 ed esprimere d nella forma $a \cdot 63 + b \cdot 364$.

2. Usando quello che si è appena trovato, dire se 63 è invertibile in $\mathbb{Z}/364\mathbb{Z}$ e se sì determinare il suo inverso.

Esercizio 3. (15 punti) Dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, vale l'uguaglianza

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (n-1) \cdot n = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{3}.$$

Esercizio 4. (15 punti) Sia $A = \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$ l'insieme dei numeri interi da 1 a 1000 e sia $B = \{11, 12, \ldots, 20\}$. Definiamo una corrispondenza tra A e B come segue: un elemento a in A è in corrispondenza con un elemento b in B se $a - b$ è un multiplo di 10.

1. Dimostrare che questa corrispondenza è una funzione $f : A \to B$.
2. Qual è l'immagine $f(A)$ di questa funzione?
3. Qual è la controimmagine $f^{-1}(20)$ dell'elemento $20 \in B$?
4. La funzione f è iniettiva? È suriettiva? È biiettiva?

Esercizio 5. (10 punti) Usando un metodo a scelta determinare se l'enunciato $A \vee C$ è conseguenza logica dell'insieme di formule $\{A \vee B, B \to C\}$.

Esercizio 6. (15 punti) Sia data la formula predicativa

$$(\forall x\ A(x) \rightarrow \exists x\ B(x)) \rightarrow \forall x\ (A(x) \rightarrow B(x)).$$

Usando il metodo dei tableau semantici nel caso predicativo verificare se essa è valida e se è soddisfacibile. Nel caso in cui sia soddisfacibile ma non valida, darne un'interpretazione che non ne è un modello.

Esercizio 7. (15 punti) Dato il linguaggio del calcolo dei predicati con i simboli per predicati Cont e Vuoto, e gli usuali simboli per variabili e costanti, se ne consideri l'interpretazione il cui dominio è una famiglia di insiemi, e in cui interpretiamo $\mathsf{Cont}(X, Y)$ come "l'insieme X contiene l'insieme Y" (cioè $X \supseteq Y$) e $\mathsf{Vuoto}(X)$ come "l'insieme X è vuoto" (cioè $X = \emptyset$). Per esempio, interpretiamo la formula $\forall Y\ \exists X\ \mathsf{Cont}(X, Y)$ come "Per ogni insieme c'è un insieme che lo contiene".

Formalizzare le seguenti frasi nel linguaggio del calcolo dei predicati.

1. Esiste un insieme che contiene ogni insieme.
2. L'insieme vuoto è contenuto in tutti gli insiemi.
3. Per l'inclusione tra insiemi vale la proprietà transitiva.

Tradurre in linguaggio naturale le formule predicative che seguono, usando l'interpretazione descritta sopra, e dire se in questa interpretazione sono vere o no.

4. $\forall X\ \forall Y\ \exists Z\ (\mathsf{Cont}(X, Z) \wedge \neg\mathsf{Cont}(Y, Z))$
5. $\forall X (\mathsf{Vuoto}(X) \rightarrow (\forall Y\ \neg\mathsf{Cont}(X, Y)))$

Esercizio 8. (10 punti) Fissato un intero positivo n, definiamo l'insieme A_n come

$$A_n = \left\{ \frac{k}{n} \; : \; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Qual è la cardinalità di A_1? Del generico A_n? Dell'unione $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$?
