LOGICA MATEMATICA

Canale E–O   a.a. 2006–07

Docente: C. Malvenuto

Secondo compito di esonero – 17 gennaio 2007

Istruzioni.

- Completare subito la parte inferiore di questa pagina con il proprio nome, cognome e firma.
- Scrivere solamente su questi fogli, anche dietro se occorre, a penna o a matita. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
- Tutte le risposte (tranne dove sono previste risposte multiple) vanno **motivate**.
- Nelle domande con risposte multiple, mettere una croce sulla lettera corrispondente alla risposta esatta.
- **NON PARLARE** pena il ritiro immediato del compito.

ESERCIZIO	PUNTEGGIO
1	/10
2	/15
3	/15
4	/15
5	/10
6	/20
7	/10
8	/5
TOTALE	/100

Nome e Cognome ↓	**Firma ↓**

Esercizio 1. *(10 punti)* Dimostrare per induzione che, per ogni naturale $n \geq 1$, vale:

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1.$$

Esercizio 2. *(15 punti)* Verificare con il metodo dei tableau semantici che la formula proposizionale che segue è insoddisfacibile:

$$(\neg(A \vee \neg B) \to C) \wedge (A \vee B) \wedge \neg(A \vee C).$$

Esercizio 3. *(15 punti)* Usando un metodo a scelta e motivando la risposta, dire se la formula

$$(\neg p \land q) \lor r \to \neg p \lor (q \land r)$$

- è valida
- è insoddisfacibile
- è sia soddisfacibile che falsificabile

Se esistono interpretazioni che rendono vera la formula, descriverne una.

Esercizio 4. *(15 punti)* Dimostrare, usando il metodo dei tableau semantici nel caso predicativo, che la formula che segue è valida:

$$(\forall x\ \neg P(x)) \rightarrow (\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))).$$

Esercizio 5. *(10 punti)* Data la formula proposizionale $A = (p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$, determinare una formula A' logicamente equivalente ad A che contenga solo i connettivi $\neg$ e $\wedge$.

Esercizio 6. *(20 punti)* Formalizzare le seguenti frasi nel linguaggio del calcolo dei predicati. Si usino i predicati $U(x)$ con il significato di "x è un utente", $P(y)$ con il significato di "y è un programma" e $A(z, w)$ con il significato di "z adopera w". Per esempio, la frase *Tutti gli utenti usano il programma* Q può essere formalizzata come $P(Q) \wedge \forall x\ (U(x) \rightarrow A(x, Q))$.

1. R è un programma.
2. Gli utenti che adoperano il programma Q adoperano anche il programma R.
3. Qualche utente usa il programma Q, ma l'utente D no.
4. C'è un programma che non viene usato da nessun utente.
5. L'utente E usa tutti i programmi usati dall'utente F.

Tradurre in linguaggio naturale le formule predicative che seguono, usando l'interpretazione descritta sopra.

6. $U(H)$
7. $\exists x\ (U(x) \wedge \forall y\ (P(y) \rightarrow A(x, y)))$
8. $\forall x\ ((U(x) \wedge A(x, Q)) \rightarrow \neg A(x, R))$

Sempre nella stessa interpretazione, definire a parole i seguenti insiemi:

9. $X = \{x\ :\ U(x) \wedge A(x, Q) \wedge (A(x, R) \vee A(x, S))\}$
10. $Y = \{x\ :\ P(x) \wedge \exists y\ (U(y) \wedge A(y, x))\}$

Esercizio 7. *(10 punti)* L'insieme dei numeri interi positivi divisibili per 3 e quello dei numeri interi negativi dispari hanno la stessa cardinalità? Perché?

Esercizio 8. *(5 punti)* Dare la definizione di equipotenza tra due insiemi.