METODI MATEMATICI PER L'INFORMATICA

Canale E–O a.a. 2009–10

Docente: C. Malvenuto

Prova intermedia – 12 novembre 2009

Esercizio 1. *(10 punti)*

1. Siano $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Determinare il prodotto cartesiano di A e B.
2. Dare la definizione di corrispondenza tra A e B.
3. Quante sono le corrispondenze di A in B?

1. Il prodotto cartesiano $A \times B$ di A e B è composto da tutte le coppie in cui il primo elemento appartiene ad A e il secondo a B. Si ha quindi, $A \times B = \{(1,1), (1,3), (1,5), (1,7), (2,1), (2,3), (2,5), (2,7), (3,1), (3,3), (3,5), (3,7)\}$.
2. Una corrispondenza tra A e B è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$.
3. Le corrispondenze di A in B sono tante quante i sottoinsiemi di $A \times B$. Dato che $A \times B$ ha 12 elementi, le corrispondenze tra A e B sono 2^{12}.

Esercizio 2. *(10 punti)* Siano A e B insiemi. Dimostrare che

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

(Questo insieme $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ è detto *differenza simmetrica* di A e B e si indica con $A \Delta B$.)

- Cominciamo col mostrare che $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subseteq (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, cioè che ogni elemento del primo insieme è anche un elemento del secondo. Sia allora x un generico elemento di $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Dato che appartiene all'unione di due insiemi, appartiene al primo o al secondo: distinguiamo i due casi.

  Se si ha $x \in A \setminus B$, ciò significa che x appartiene ad A e non appartiene a B. Appartenendo ad A, x appartiene anche all'unione $A \cup B$; non appartenendo a B, x non appartiene all'intersezione $A \cap B$.

  Se si ha $x \in B \setminus A$, allora x appartiene a B ma non ad A. Ragionando come nel caso precedente, si ha di nuovo che x appartiene all'unione $A \cup B$ e non appartiene all'intersezione $A \cap B$.

  Quindi, in entrambi i casi, appartiene ad $A \cup B$ ma non ad $A \cap B$, e ciò significa che appartiene ad $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

- Verifichiamo ora che vale anche l'altra inclusione, cioè $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Sia allora x un elemento di $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Abbiamo quindi che x appartiene all'unione $A \cup B$ ma non all'intersezione $A \cap B$; x appartiene cioè all'insieme A o all'insieme B, ma non a entrambi. Quindi, se appartiene all'insieme A non appartiene all'insieme B (e quindi è in $A \setminus B$), mentre se appartiene a B non appartiene ad A (e così è in $B \setminus A$). In conclusione, o x si trova in $A \setminus B$ o in $B \setminus A$, e quindi è un elemento di $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Avendo dimostrato le due inclusioni, abbiamo dimostrato che i due insiemi dati sono uguali.

Esercizio 3. *(10 punti)* Trovare tutte le coppie di elementi $(\overline{a}, \overline{b})$ con $\overline{a}$ e $\overline{b}$ in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ tali che $\overline{a}\,\overline{b} = \overline{0}$.

Un elemento $\overline{c}$ di $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ è uguale all'elemento $\overline{0}$ se e solo se il numero intero c è un multiplo di 8. Quindi le coppie $(\overline{a}, \overline{b})$ il cui prodotto è $\overline{0}$ corrispondono alle coppie di interi (a, b) il cui prodotto ab sia un multiplo di 8; di questi interi basterà prendere uno per ogni classe resto modulo 8, e quindi basta prendere quelli compresi tra 0 e 7.

Troviamo quindi tutte le coppie $(\overline{a}, \overline{b})$ in cui a oppure b è uguale a 0 (ricordate che 0 è un multiplo di qualsiasi numero, e quindi in particolare di 8). Oltre a queste, le uniche possibilità di ottenere 8 o un suo multiplo come prodotto di numeri compresi tra 0 e 7 si hanno quando uno dei due multipli è multiplo di 2 e l'altro è multiplo di 4. Questi casi corrispondono a (2,4), (4,2), (4,4), (6,4), (4,6).

In conclusione, quindi, le coppie cercate sono:

$$(\overline{0},\overline{0}), (\overline{0},\overline{1}), \ldots, (\overline{0},\overline{7}), (\overline{1},\overline{0}), (\overline{2},\overline{0}), \ldots, (\overline{7},\overline{0}), (\overline{2},\overline{4}), (\overline{4},\overline{2}), (\overline{4},\overline{4}), (\overline{6},\overline{4}), (\overline{4},\overline{6}).$$

Esercizio 4. *(10 punti)* Sia S l'insieme $\{a, b, c, d\}$ e sia R la seguente relazione su S:

$$R = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c), (c,d), (d,c), (d,d)\}.$$

Quali delle seguenti proprietà soddisfa la relazione R: riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva, totale?

La relazione R è riflessiva perché include tutte le coppie della forma (x,x), e cioè (a,a), (b,b), (c,c) e (d,d).

È simmetrica perché ogni volta che è presente una coppia (x,y) è presente anche la coppia (y,x) con gli elementi scambiati: essendo presente (a,b) è presente (b,a) e così via.

Non è antisimmetrica perché, per esempio, sono presenti sia la coppia (a,b) che (b,a), e a non è uguale a b. (Attenzione: non è sufficiente dire "non è antisimmetrica perché è simmetrica"! Perché?)

Non è transitiva perché sono presenti le coppie (a,c) e (c,d) ma non la coppia (a,d).

Non è totale perché gli elementi a e d non sono comparabili, cioè la relazione non include né la coppia (a,d) né la coppia (d,a).

Esercizio 5. *(15 punti)* Sia data sull'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali la relazione definita da

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \text{ è un numero intero.}$$

1. Mostrare che $\sim$ è una relazione d'equivalenza.
2. Descrivere la classe di equivalenza dell'elemento 1, la classe dell'elemento 1,25 e l'insieme quoziente $\mathbb{R}/\sim$ associato alla relazione (cioè descrivere le classi di equivalenza e la partizione associata).
3. Trovare un insieme di rappresentanti per $\sim$.

1. Mostriamo che la relazione $\sim$ è riflessiva, simmmetrica e transitiva.

   Riflessività. Se x è un numero reale si ha $x - x = 0$, e 0 è un numero intero. Quindi per ogni x reale si ha $x \sim x$.

   Simmetria. Siano x e y due numeri reali per i quali vale $x \sim y$. Si ha cioè che $x - y$ è un numero intero. Ma allora anche $y - x$ è un numero intero (l'opposto di $x - y$), e quindi vale anche $y \sim x$.

   Transitività. Siano x, y e z tre numeri reali tali che $x \sim y$ e $y \sim z$: si ha quindi che $x - y$ è un numero intero, diciamo k, e anche $y - z$ è un numero intero, diciamo h. Ne segue che $x - z = (x - y) + (y - z) = k + h$ è a sua volta un numero intero, e quindi si ha $x \sim z$.

   (Informalmente, questa relazione considera equivalenti due numeri reali se "hanno la stessa parte decimale". Quindi 0,3, 1,3, 150,3 sono tutti equivalenti tra loro. Attenzione però ai numeri negativi: $-0{,}3$ non è in relazione con 0,3, visto che la loro differenza è 0,6, che non è un intero. I numeri negativi in relazione con 0,3 sono $-0{,}7$, $-1{,}7$, $-2{,}7$ e così via.)

2. La classe di equivalenza dell'elemento 1, cioè l'insieme degli elementi di $\mathbb{R}$ in relazione con 1, è composta da tutti i reali x tali che $x - 1$ sia un intero. Ovviamente $x - 1$ è intero se e solo se lo è x: quindi la classe di equivalenza cercata è costituita da tutti gli interi.

   Ragionando in modo analogo, la classe dell'elemento 1,25 è composta da tutti i numeri reali della forma $k + 0{,}25$, dove k è un numero intero. Cioè $[1{,}25]_\sim = \{k + 0{,}25 \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$.

   Quindi l'insieme quoziente $\mathbb{R}/\sim$, che è composto da tutte le classi di equivalenza, contiene una classe per ogni possibile "parte decimale" e la partizione associata alla relazione $\sim$ ripartisce $\mathbb{R}$ ponendo nella stessa parte della partizione tutti i reali con la stessa "parte decimale".

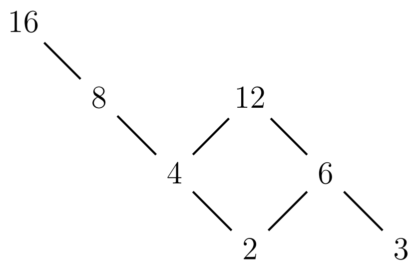
   Definiamo per bene che cosa intendiamo per "parte decimale". Dato un numero reale r, si definisce *parte intera di r* il più grande numero intero che sia minore o uguale a r: questo numero si indica in genere con $\lfloor r \rfloor$. Quindi $\lfloor 1{,}3 \rfloor = 1$. Attenzione ai numeri negativi: $\lfloor -1{,}3 \rfloor$ è uguale a -2 e non a -1, perché -2 è appunto il più grande intero minore di $-1{,}3$. A questo punto la parte decimale di r può essere definita come $r - \lfloor r \rfloor$ e quindi sia la parte decimale di 1,3 che quella di $-0{,}7$ sono uguali a 0,3. Quindi la relazione $\sim$ definita in questo esercizio definisce due reali come equivalenti se e solo se hanno la stessa parte decimale.

3. Per quanto detto sopra, un possibile insieme di rappresentanti per $\sim$ è l'intervallo $[0{,}1)$. Infatti ogni reale r è equivalente a un unico elemento di questo intervallo, quello ottenuto prendendo la parte decimale di r.

Esercizio 6. *(10 punti)* Sia dato l'insieme $X = \{2, 3, 4, 6, 8, 12, 16\}$; su X si consideri l'ordine parziale dato dalla divisibilità $|$, cioè gli elementi a e b sono in relazione $a|b$ se e solo se a è un divisore di b.

1. Si disegni il diagramma di Hasse dell'insieme parzialmente ordinato $(X, |)$.
2. Si determinino gli insiemi degli elementi minimali e massimali e, se esistono, il massimo e il minimo di $(X, |)$.

1. Il diagramma richiesto è:



2. Un elemento di $(X, |)$ è minimale se non è divisibile per nessun altro elemento di X. Quindi qui gli elementi minimali sono 2 e 3. Analogamente, gli elementi massimali sono quelli che non dividono nessun altro elemento dell'insieme, e quindi sono 12 e 16.

   Un elemento di $(X, |)$ è minimo se divide tutti gli altri elementi di X, e questo qui non si verifica per nessun elemento (per esempio, 2 non divide 3 etc.). In alternativa, ci si può ricordare del fatto che un elemento è minimo se e solo se è l'unico elemento minimale dell'insieme parzialmente ordinato; in $(X, |)$ abbiamo trovato più di un elemento minimale, e quindi non c'è un minimo.

   Ragionando in modo analogo a quanto fatto per l'esistenza del minimo, concludiamo che non esiste neppure un massimo.

Esercizio 7. *(15 punti)* Sia $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, sia $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e sia $f : X \to Y$ l'applicazione così definita:

$$f(x) = x^2.$$

(Per esempio, $f(2) = 4$.)

1. Determinare $f^{-1}(3)$ e $f^{-1}(4)$.
2. Determinare l'immagine di f.
3. Dire se l'applicazione f è iniettiva, suriettiva, biunivoca.

1. Ricordiamo che $f^{-1}(y)$ è per definizione l'insieme degli elementi del dominio la cui immagine è y, cioè
$$f^{-1}(y) = \{x \in X \ : \ f(x) = y\}.$$
Dato che nessun elemento di X elevato al quadrato è uguale a 3, la controimmagine di 3 è l'insieme vuoto: $f^{-1}(3) = \emptyset$. (È sbagliato dire che la controimmagine di 3 non esiste. Dato comunque un elemento del codominio, esso ha sempre una controimmagine: può capitare, come in questo caso, che sia uguale all'insieme vuoto.)

   Gli elementi di X che elevati al quadrato sono uguali a 4 sono 2 e -2, e quindi si ha $f^{-1}(4) = \{-2, 2\}$.
2. L'immagine di f è l'insieme dei valori assunti da f, cioè l'insieme $\{f(x) : x \in X\}$. Gli elementi di X sono -2, -1, 0, 1 e 2 che, elevati al quadrato, danno rispettivamente 4, 1, 0, 1 e 4. L'immagine di f è quindi l'insieme composto da questi elementi, cioè l'insieme $\{0, 1, 4\}$.
3. Abbiamo visto che esistono almeno due elementi di X la cui immagine attraverso la funzione f è uguale (per esempio $f(-2) = f(2) = 4$), e quindi la f non è iniettiva.

   Abbiamo anche visto che non tutti gli elementi di Y sono immagine di qualche elemento di X (per esempio nessun elemento ha come immagine 3), e quindi la funzione non è suriettiva.

   Per essere biunivoca, una funzione deve essere sia iniettiva che suriettiva, e quindi la f non è biunivoca.

Esercizio 8. *(20 punti)* Sia $I = [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$ (l'intervallo composto da tutti i numeri reali tra 0 e 2π inclusi). Consideriamo la funzione g, definita come la funzione coseno ristretta a questo intervallo: si abbia cioè $g : I \to \mathbb{R}$ dove per ogni x in I si ha $g(x) = \cos x$.

1. Determinare $g^{-1}(0)$ e $g^{-1}(\pi)$.
2. Determinare l'immagine di g.
3. Dire se l'applicazione g è iniettiva, suriettiva, biunivoca.
4. Trovare un numero reale t tale che la funzione g, considerata solo sull'intervallo $[0, t]$, sia iniettiva.

1. Sull'intervallo I il coseno assume il valore 0 esattamente nei punti $\pi/2$ e $3\pi/2$, quindi si ha $g^{-1}(0) = \{\pi/2, 3\pi/2\}$. Il coseno, e quindi la funzione g, non assumono mai valori maggiori di 1, e quindi in particolare non assumono mai il valore π: quindi si ha $g^{-1}(\pi) = \emptyset$.

2. L'immagine di g, cioè l'insieme dei valori che assume nel suo dominio, coincide con l'immagine del coseno sull'intervallo I. Dalla trigonometria si sa che in questo intervallo il coseno assume tutti i valori compresi tra -1 e 1 (estremi inclusi), e quindi si ha $\mathrm{Im}(g) = [-1, 1]$.

3. Abbiamo già visto che esiste qualche valore che la g assume in più di un punto del suo dominio (per esempio $g(\pi/2) = g(3\pi/2) = 0$), e quindi g non è iniettiva.

   Abbiamo anche visto che l'immagine della g, cioè l'intervallo $[-1, 1]$, non coincide con il suo codominio, cioè $\mathbb{R}$, e quindi la g non è suriettiva. In alternativa, si può osservare che esistono valori del codominio, come π, che la g non assume in nessun punto del suo dominio.

   Non essendo iniettiva e non essendo suriettiva, la g non è biunivoca.

4. Ricordando l'andamento della funzione coseno, sappiamo che nell'intervallo $[0, \pi]$ essa è strettamente decrescente, e quindi in particolare non assume mai due volte lo stesso valore ed è così iniettiva. Visto che l'esercizio chiede *un* numero reale t tale che la g sia iniettiva su $[0, t]$, possiamo scegliere per t un qualunque valore compreso tra 0 e π. Viceversa, non va bene nessun valore maggiore di π, perché $\cos(\pi + \varepsilon) = \cos(\pi - \varepsilon)$.

In questo esercizio e nel precedente, è importante ricordare che una funzione è definita dal suo dominio, dal suo codominio e da come fa corrispondere elementi del codominio a elementi del dominio. Quindi non bisogna confondere la funzione g dell'esercizio 8 con la funzione coseno definita su tutto $\mathbb{R}$. Non è vero, per esempio, che la funzione g sia periodica; non si possono usare le proprietà del coseno se non si è verificato che valgano anche per il dominio e il codominio della g.