METODI MATEMATICI PER L'INFORMATICA

Canale E–O a.a. 2009–10

Docente: C. Malvenuto

Compito di esame – 28 gennaio 2010
Parte prima

Esercizio 1. *(25 punti)* Sia R la relazione definita su $\mathbb{Z}$ da:

aRb se e solo se la somma delle cifre di a è maggiore o uguale alla somma delle cifre di b.

Quindi, per esempio, si ha che $254R71$ perché $2+5+4=11 \geq 7+1=8$.

Quali proprietà (riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva, totale) soddisfa la relazione R e quali no? È una relazione di equivalenza? È una relazione d'ordine?

La proprietà **riflessiva** è soddisfatta perché per ogni numero intero la somma delle cifre è uguale (e quindi maggiore o uguale) a sé stessa.

La proprietà **simmetrica** non è soddisfatta. Un controesempio è dato dai numeri 254 e 71. Come detto sopra, si ha $254R71$, ma non si ha $71R254$ perché $7+1=8 \ngeq 2+5+4=11$.

La proprietà **antisimmetrica** non è soddisfatta. Un controesempio è dato da qualsiasi coppia di numeri distinti le cui cifre abbiano la stessa somma, come 25 e 16. Infatti $25R16$ e $16R25$ (perché entrambi i numeri hanno 7 come somma delle cifre), ma $25 \neq 16$.

La proprietà **transitiva** è soddisfatta (è conseguenza della corrispondente proprietà dell'uguaglianza tra interi): presi comunque tre numeri a, b e c, se a ha la stessa somma delle cifre di b, e b ha la stessa somma delle cifre di c, ciò deve valere anche per a e c.

Infine, la proprietà **totale** è soddisfatta (anche in questo caso è conseguenza della corrispondente proprietà dell'uguaglianza tra interi): presi comunque due numeri interi, le somme delle rispettive cifre sono a loro volta due numeri interi, che saranno sicuramente confrontabili, cioè il primo è maggiore o uguale del secondo o viceversa.

Perché la R sia una relazione di equivalenza, deve essere riflessiva, simmetrica e transitiva. Non essendo simmetrica, non è di equivalenza.

Perché la R sia una relazione d'ordine, deve essere riflessiva, antisimmetrica e transitiva. Non essendo antisimmetrica, non è d'ordine.

Esercizio 2. *(15 punti)* È vero che comunque si scelgano tre insiemi A, B e C si ha sempre

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)?$$

Dimostrarlo o trovare un controesempio.

L'uguaglianza non è sempre soddisfatta. Per verificarlo, basta prendere un opportuno controesempio.

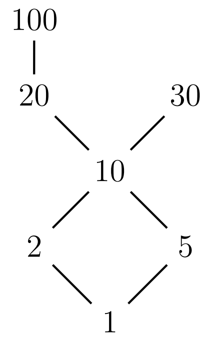
Siano $A=\{1,2\}$, $B=\{1,3\}$ e $C=\{2,3\}$. Si ha allora: $A \setminus B = \{2\}$ e quindi $(A \setminus B) \setminus C = \emptyset$. D'altro canto, $B \setminus C = \{1\}$ e così $A \setminus (B \setminus C) = \{2\}$.

(Si può verificare che, in generale, l'unico caso in cui l'uguaglianza vale è quello in cui l'intersezione tra A e C è vuota.)

Esercizio 3. *(20 punti)* Si consideri l'insieme $X = \{1, 2, 5, 10, 20, 30, 100\}$ ordinato mediante la relazione d'ordine $|$ della divisibilità.

1. Disegnare il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato $(X, |)$.
2. Descrivere gli insiemi degli elementi massimali e di quelli minimali, e eventuali massimo e minimo di $(X, |)$.

1. Il diagramma richiesto è:



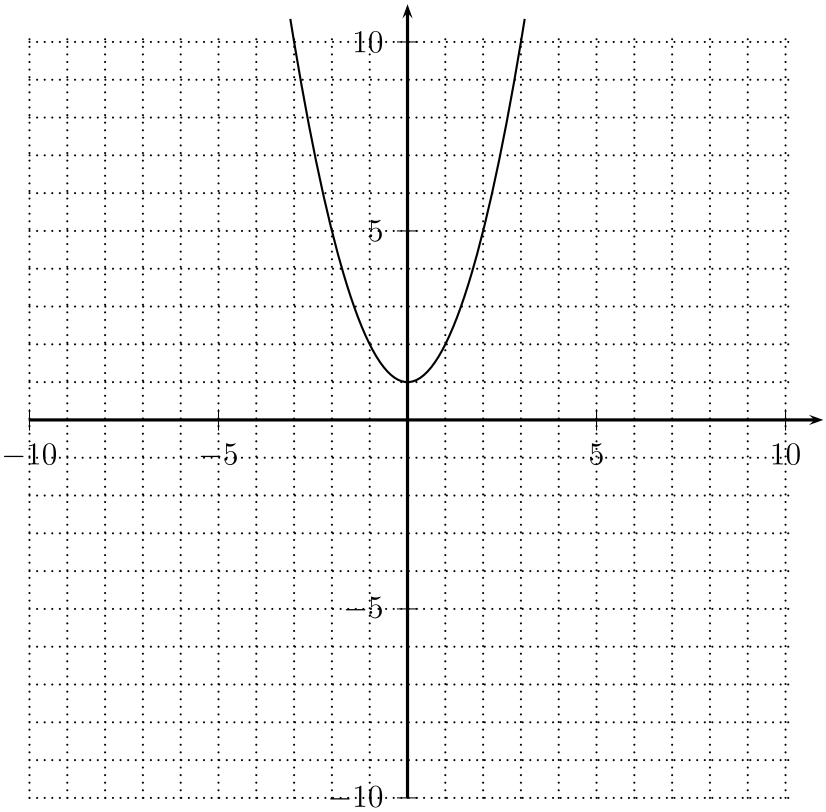
2. Un elemento di $(X, |)$ è massimale se non divide nessun altro elemento di X. Quindi qui gli elementi massimali sono 30 e 100. Analogamente, gli elementi minimali sono quelli che non sono divisibili per nessun altro elemento dell'insieme, e quindi l'unico elemento minimale è 1.

   Un elemento di $(X, |)$ è massimo se è divisibile per tutti gli altri elementi di X, e ciò in questo insieme non si verifica per nessun elemento (per esempio, 100 non è divisibile per 30 etc.). In alternativa, ci si può ricordare del fatto che un elemento è massimo se e solo se è l'unico elemento massimale dell'insieme parzialmente ordinato; in $(X, |)$ abbiamo trovato più di un elemento massimale, e quindi non c'è un massimo.

   Esiste un minimo, cioè l'elemento 1, che divide ognuno degli altri numeri (e che è l'unico elemento minimale).

Esercizio 4. *(15 punti)*

1. Disegnare il grafico della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 + 1$.



2. Trovare l'immagine $f(\mathbb{R})$ della funzione f.
3. La funzione f è iniettiva? Suriettiva? Biunivoca?

1. Si veda la curva tracciata nell'illustrazione.
2. L'immagine della funzione x^2 è costituita da tutti i reali maggiori o uguali a zero (infatti il quadrato di qualsiasi numero reale è maggiore o uguale a zero, il valore 0 viene assunto in 0 ed è una funzione continua e illimitata). La funzione f somma 1 a ogni quadrato e quindi la sua immagine è $[1, +\infty)$, cioè l'insieme di tutti i reali maggiori o uguali a 1.
3. La funzione non è iniettiva perché esistono coppie di numeri reali distinti che hanno la stessa immagine: per esempio $f(1) = f(-1) = 2$.

   Poiché abbiamo visto nel punto 2. che l'immagine della funzione f non coincide con tutto $\mathbb{R}$, la funzione non è suriettiva (per esempio, non assume mai valori negativi).

   La funzione non è biunivoca perché per esserlo dovrebbe essere sia iniettiva che suriettiva.

Esercizio 5. *(10 punti)* Sia data l'assegnazione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $f(n) = 0$ se n è un numero primo e $f(n) = 1$ se n è pari. Spiegare se definisce un'applicazione oppure no.

Per essere un'applicazione, la f dovrebbe assegnare un valore a ogni elemento di $\mathbb{N}$, ma visto che è stata definita solo per i primi e per i pari non assegna alcun valore ai numeri naturali dispari che non sono primi (come 9, 15, 21 etc.).

In alternativa, si può osservare che la f assegna al numero 2 sia il valore 0 (perché 2 è primo) che il valore 1 (perché 2 è pari), mentre un'applicazione deve assegnare un solo valore a ogni elemento del suo dominio.

Esercizio 6. *(15 punti)* Sia L l'insieme composto dai numeri interi multipli di 5; sia M l'insieme $\{x : x \in \mathbb{Q}, 0 \leq x \leq 1\}$. Gli insiemi L e M sono equipotenti?

L'insieme L ha la potenza del numerabile perché è possibile definire la bijezione $g : L \to \mathbb{N}$ che manda ogni multiplo di 5 della forma $5k$ nel numero k.

L'insieme M è infinito (per esempio perché tra ogni coppia di elementi distinti di M c'è un terzo elemento di M, la loro media; oppure perché contiene la successione infinita $\{1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$). Inoltre M è un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$, che ha la potenza del numerabile. Quindi M ha a sua volta la potenza del numerabile.

Poiché L e M hanno entrambi la potenza del numerabile, sono equipotenti.