Note di Logica Matematica n.1

Claudia Malvenuto e Roberto Maieli*
Canale E-O - a.a 2002-2003

23 novembre 2005

1 Logica e ragionamento

La logica non studia i meccanismi del ragionamento in senso generale, bensìil concetto di *dimostrazione logica.* Tale studio viene condotto attraverso l'analisi delle *regole di inferenza*, le regole cioè che applichiamo quando concateniamo (correttamente) *proposizioni* che sono ritenute essere *vere o false.*
Una inferenza è una qualsiasi sequenza finita di proposizioni dove l'ultima proposizione è ottenuta come *conclusione* dalle rimanenti, assunte come *premesse.*
Il procedimento che fa passare dalle premesse all conclusione prende il nome di *regola di inferenza.* Una regola di *inferenza è elementare* quando tale procedimento consta di un solo passo, ovvero quando da una o più premesse si passa in un solo passo alla conclusione senza passare per conclusioni intermedie. La logica studia le inferenze elementari corrette, e mostra come ridurre a quelle elementari anche le inferenze più complesse.

Definizione 1 *Per* proposizione *si intende una qualsiasi espressione linguistica per la quale abbia senso chiedersi quando è vera o falsa. Nella logica classica una proposizione può assumere uno ed uno solo dei due valori di verità:*

- vero*, indicato anche con* V *(oppure* 1*);*
- falso*, indicato anche con* F *(oppure* 0*).*

Le proposizioni sono usualmente espresse dagli enunciati dichiarativi del linguaggio naturale, quali ad esempio

"5 è un numero primo"
"2 è dispari"
"tutti gli uomini sono mortali"
"Anna studia logica"

In genere indicheremo le proposizioni con lettere maiuscole (eventualmente con pedici) $A, B, C, P_1, ...P_n, ...$

Il concetto centrale in logica è la relazione di *conseguenza logica* fra proposizioni:

Definizione 2 (conseguenza logica) *Una proposizione P è conseguenza logica delle (o segue logicamente dalle) proposizioni $P_1, ..., P_n$ se e solo se non si dà mai il caso che le proposizioni $P_1, ..., P_n$ siano vere e la conclusione falsa o, equivalentemente, se e solo se tutte le volte che le premesse $P_1, ..., P_n$ sono vere allora sarà vera anche la conclusione.*

Definizione 3 (inferenza corretta) *Una inferenza*

$$\frac{P_1 \quad ... \quad P_n}{P}$$

è corretta *se e solo se la conclusione è conseguenza logica delle premesse.*

La logica studia le inferenze corrette.
Sia A la proposizione "5 è un numero primo" e B la proposizione "4 è un numero primo", allora l'inferenza

$$\frac{A \text{ oppure } B \qquad \text{non } B}{A}$$

*Dipartimento di Informatica, Università di Roma "La Sapienza", Via Salaria, 113. E-mail: `claudia, maieli@dsi.uniroma1.it`.

è un'inferenza corretta. Infatti le due premesse "A oppure B" e " non B" sono entrambe vere e la conclusione "A" è anch'essa vera.
In generale occorre fare attenzione al fatto seguente: in una regola corretta se le premesse sono tutte vere allora la conclusione è vera; se però almeno una delle premesse è falsa allora la conclusione può essere anch'essa falsa. In altre parole la correttezza di una inferenza non è legata alla verità o falsità della conclusione. La conclusione della regola può essere conseguenza logica delle premesse anche se falsa. Ad esempio la seguente inferenza è corretta anche se la conclusione "3 è pari" è falsa (si noti che la premessa "3 non è primo" è falsa):

$$\frac{\text{“3 è pari oppure 3 è primo”} \qquad \text{“3 non è primo”}}{\text{“3 è pari”}}$$

Consideriamo l'inferenza :

$$\frac{\text{“se sono colpevole devo essere punito”} \qquad \text{“non sono colpevole”}}{\text{“non devo essere punito”}}\, R_1$$

a prima vista R_1 sembra un ragionamento del tutto convincente: tuttavia dal punto di vista logico l'inferenza non è corretta. Per convincerci di questo fatto, manteniamo la stessa struttura logica dell'inferenza precedente e consideriamo una istanza analoga:

$$\frac{\text{“se Roberto è romano allora è italiano”} \qquad \text{“Roberto non è romano”}}{\text{“Roberto non è italiano”}}\, R_1$$

La premessa "se Roberto è romano allora Roberto è italiano" è senz'altro vera perché tutti i romani sono italiani, ma se Roberto è nato a Catania allora anche la seconda premessa è vera mentre la conclusione è falsa.
In generale per scoprire se un'inferenza non è corretta si cerca un *controesempio*, ossia una instanza o applicazione della regola in cui le premesse sono vere e la conclusione falsa.
Consideriamo le due inferenze R_1, R_2:

$$\frac{\text{“se manca la benzina la moto non parte”} \qquad \text{“manca la benzina”}}{\text{“la moto non parte”}}\, R_2$$

$$\frac{\text{“se manca la benzina allora la moto non parte”} \qquad \text{“la moto non parte”}}{\text{“manca la benzina”}}\, R_3$$

L'inferenza R_2 è corretta ed è detta *modus ponens*, mentre l'inferenza R_3 non è corretta ed è chiamata *fallacia dell'affermazione del conseguente*. Analogamente, la regola R_1 vista sopra non è corretta ed è chiamata *fallacia della negazione dell'antecedente*.
Occorre, comunque, fare molta attenzione con le espressioni del linguaggio ordinario e non farsi trarre in inganno dal significato delle proposizioni. Se osserviamo l'inferenza di sopra R_2 essa, oltre ad essere corretta, sembra del tutto convincente perché stabilisce un nesso di causa-effetto. Questo nesso di causa-effetto è estraneo alla logica.
Consideriamo l'inferenza:

$$\frac{\text{“se 5 è un cavallo, allora il Sole è un panettone”} \qquad \text{“5 è un cavallo”}}{\text{“il Sole è un panettone”}}\, R_2$$

Questa regola stravagante è corretta, essendo una istanza del *modus ponens*: infatti la conclusione bizzarra segue logicamente dalle premesse. Non appena si assume che da una proposizione ne segue un'altra ("se 5 è un cavallo, allora il Sole è un panettone") e vale la prima ("5 è un cavallo") allora si può dedurre correttamente la seconda ("il Sole è un panettone").
Queste ragioni inducono chi voglia affrontare uno studio rigoroso, non equivoco, delle regole logiche ad abbandonare il linguaggio ordinario (può trarre in inganno!) Il processo di astrazione dal linguaggio ordinario è un processo logico.
Per concludere, la logica si occupa delle inferenze elementari corrette che hanno come premesse e conclusione enunciati logici. Tali inferenze prendono anche il nome di regole logiche. Le regole logiche sono il motore delle dimostrazioni logiche.

1.1 Esercizi

Esercizio 1 *Quali tra le seguenti inferenze sono corrette?*

1. :

$$\frac{\text{“se c’è fumo allora c’è arrosto”} \qquad \text{“non c’è fumo”}}{\text{“non c’è arrosto”}}$$

2. :

$$\frac{\text{“se c’è fumo allora c’è arrosto”} \qquad \text{“non c’è arrosto”}}{\text{“non c’è fumo”}}$$

3. :

$$\frac{\text{“se Marco beve vino, allora si ubriaca”} \qquad \text{“Marco non si ubriaca”}}{\text{“Marco non beve vino”}}$$

4. :

$$\frac{\text{“se Marco beve vino, allora si ubriaca”} \qquad \text{“Marco non beve vino”}}{\text{“Marco non si ubriaca”}}$$

5. :

$$\frac{\text{“se Marco non ha il passaporto, allora non va in Russia”} \qquad \text{“Marco va in Russia”}}{\text{“Marco ha il passaporto”}}$$

6. :

$$\frac{\text{“se Marco non ha il passaporto, allora non va in Russia”} \qquad \text{“Marco ha il passaporto”}}{\text{“Marco va in Russia”}}$$

7. :

$$\frac{\text{“Se Aldo ha la febbre allora non esce di casa”} \qquad \text{“Aldo non ha la febbre”}}{\text{“Aldo esce di casa”}}$$

8. :

$$\frac{\text{“Se Aldo ha la febbre allora non esce di casa”} \qquad \text{“Aldo esce di casa”}}{\text{“Aldo non ha la febbre”}}$$

9. :

$$\frac{\text{“Se Aldo ha vinto, allora Mario ha perso”} \qquad \text{“Se Mario ha perso allora Giulio ha vinto”}}{\text{“Se Aldo ha vinto allora Giulio ha vinto”}}$$

10. :

$$\frac{\text{“Se Anna è ligure allora Chiara p̀iemontese”}}{\text{“Anna non è ligure o Chiara non è piemontese”}}$$

11. :

$$\frac{\text{“Se Anna è ligure allora Chiara p̀iemontese”}}{\text{“Anna è ligure e Chiara è piemontese”}}$$

12. :

$$\frac{\text{“Anna è ligure e Chiara è piemontese”}}{\text{“Se Anna è ligure, allora Chiara è piemontese”}}$$

Esercizio 2 *Supponiamo di avere a diposizione dei cartoncini. Sappiamo che ogni cartoncino reca su una faccia una lettera dell’alfabeto italiano e sull’altra un numero* $1, 2, 3, \ldots$ *Si considerino quattro cartoncini messi in fila come nella figura 1. Qual è il minimo numero di cartoncini che occorre girare, tra quelli dati in figura 1, per verificare l’enunciato: “se sulla faccia di un cartoncino c’è una vocale, allora sull’altra faccia c’è un numero dispari”? E il numero minimo di cartoncini da girare per verificare lo stesso enunciato, nel caso in cui siano disposti come in figura 2?*

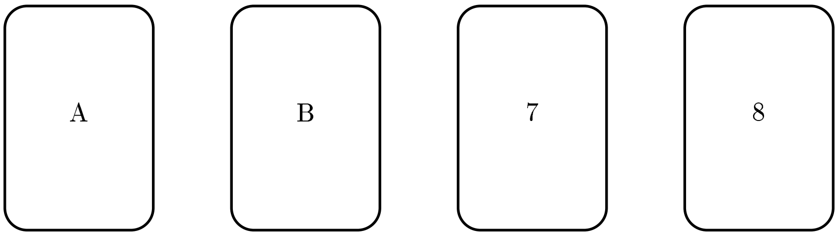

Figura 1:

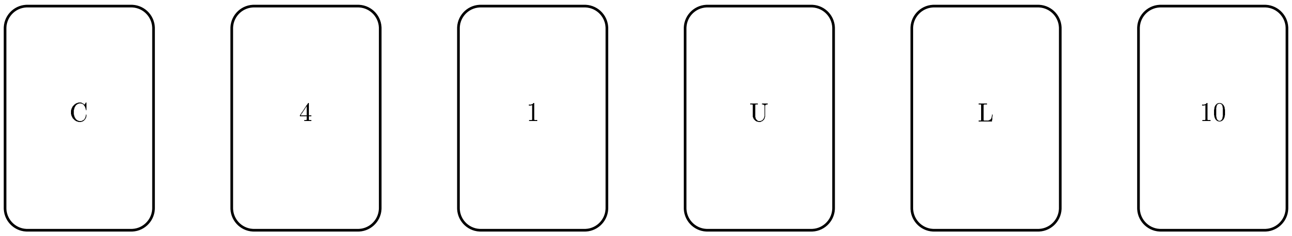

Figura 2: