Note di Logica Matematica n.2

Claudia Malvenuto e Roberto Maieli *
canale E-O - a.a. 2002-2003

22 novembre 2002

L'insieme dei connettivi $\neg, \wedge, \vee$ costituisce una *base di connettivi*, nel senso che sono sufficienti a definire da soli tutti gli altri connettivi. In realtà la coppia di connettivi $\neg, \wedge$ (o rispettivamente, la coppia $\neg, \vee$) basta da sola a definire tutti gli altri connettivi. Questo è quanto esprime il prossimo teorema.

Teorema 1 (definibilità dei connettivi) *Per ogni formula proposizionale A esiste una formula A' tale che $A \equiv A'$ ed A' usa solo i connettivi $\neg, \wedge$ (rispettivamente $\neg, \vee$).*

Dimostrazione: Dimostriamo che la coppia $\neg, \wedge$ è una base di connettivi (il caso $\neg, \vee$ è analogo ed è lasciato come esercizio). Procediamo per induzione sul numero di connettivi che compaiono nella formula A.

1. $A = p$, in altre parole A è un atomo: in questo caso $A' = A$, non occorre modificare A perché in A non compaiono connettivi.

2. $A = \neg B$: la formula B ha un connettivo in meno di A, dunque per ipotesi d'induzione esiste una formula $B' \equiv B$ in cui si usano solo i connettivi $\neg$ e $\wedge$; per il lemma sulla sostituzione [1] concludiamo $\neg B \equiv \neg B'$. Chiaramente, $\neg B'$ è la formula A' cercata, essa infatti non contiene altri connettivi se non $\neg, \wedge$.

*Dipartimento di Informatica, Università di Roma "La Sapienza", Via Salaria, 113. E-mail: `claudia, maieli@dsi.uniroma1.it`.

[1]**Lemma della Sostituzione**: Sia A una sottoformula di B, e sia A' una formula tale che $A \equiv A'$. Allora la formula B' ottenuta rimpiazzando in B il sottoalbero A con A' è tale che $B \equiv B'$.

3. $A = B \wedge C$: per ipotesi d'induzione, avendo sia B che C un numero minore di connettivi che A, esistono B', C' definiti solo in termini dei connettivi $\neg, \wedge$ logicamente equivalenti rispettivamente a B e C. Allora per il lemma sulla sostituzione concludiamo $A \equiv B' \wedge C'$. Tale formula contiene solo i connettivi $\neg, \wedge$.

4. $A = B \vee C$: per la legge di De Morgan si ha $B \vee C \equiv \neg(\neg B \wedge \neg C)$; quindi procediamo come nel caso 2, prendendo come A la formula $\neg(\neg B \wedge \neg C)$.

5. $A = B \to C$: ricordiamo che si ha l'equivalenza logica $B \to C \equiv \neg B \vee C$; possiamo quindi usare il caso 4 applicato alla formula $\neg B \vee C$.

6. $A = B \leftrightarrow C$: usando l'equivalenza logica $B \leftrightarrow C \equiv (B \to C) \wedge (C \to B)$, si può procedere come nel caso 3.

Sia $\uparrow$, denotato anche come NAND (rispettivamente $\downarrow$, NOR), il connettivo definito nel seguente modo:

$$A \uparrow B := \neg(A \wedge B)$$

(rispettivamente, $A \downarrow B := \neg(A \vee B)$), per A, B formule proposizionali.

Teorema 2 *Per ogni formula proposizionale A esiste una formula A' tale che A' fa uso solo del connettivo $\uparrow$ (rispettivamente, $\downarrow$) e $A \equiv A'$.*

Dimostrazione : Proveremo che ogni formula si può esprimere usando solamente NAND. La dimostrazione del fatto che si può scegliere solo il connettivo NOR per esprimere ogni formula è del tutto analoga ed è lasciata al lettore. Per il teorema 1, possiamo limitarci a considerare solo formule la cui base sia costituita dalla coppia di connettivi $\neg, \wedge$. Procediamo per induzione sul numero di connettivi che compaiono nella formula A. Ci sono solo tre casi:

1. A è un atomo oppure una costante: il teorema in questo caso è banalmente vero, lasciamo A intatta.

2. $A = \neg B$: per l'idempotenza di $\wedge$, abbiamo che $A \equiv \neg(B \wedge B) = (B \uparrow B)$. Poiché B ha un connettivo in meno di $A = \neg B$, possiamo applicare l'ipotesi induttiva a B: esiste una formula $B' \equiv B$ che usa solo il connettivo $\uparrow$. Applicando il lemma di sostituzione si ha $A \equiv B' \uparrow B'$. Chiaramente $B' \uparrow B'$ é definita solo tramite il connettivo $\uparrow$.

3. $A = B \wedge C$: per la doppia negazione $B \wedge C \equiv \neg(\neg(B \wedge C)) = \neg(B \uparrow C)$; procediamo quindi come nel caso 2, prendendo in considerazione la formula $\neg(\neg(B \wedge C))$.