LOGICA MATEMATICA

Claudia Malvenuto
Canale E-O
Scheda esercizi n. 1

5 ottobre 2005

La polis è più importante delle sue parti.
La parte è più importante d'ogni sua parte.
Il predicato lo è più del predicante
e l'arrestato lo è meno dell'arrestante. [...]
(Gerarchie, di Eugenio Montale, in 'Satura I')

1. Verificare che i seguenti insiemi sono uguali a coppie:
   (a) $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 1, 2\}$;
   (b) $A = \{a, b, c, a\}$ e $B = \{a, b, c\}$;
   (c) $A = \{x : x^2 - 1 = 0\}$ e $B = \{1, -1\}$;
   (d) $A = \{x : x$ è un numero reale e $x^2 + 1 = 0\}$ e $B = \emptyset$.
2. Dimostrare le seguenti affermazioni:
   (a) $A \subset \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$;
   (b) $A \subset B$ e $B \subset C \Rightarrow A \subset C$.
3. Mostrare che i seguenti insiemi sono a due a due differenti:
   $$\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$
4. Dati $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{e, b, f, d\}$, determinare $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ e $B \setminus A$.

5. Denotato con $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle parti di un insieme A, descrivere esplicitamente
   (a) $\mathcal{P}(\{x\})$ per ogni singleton $\{x\}$, $\mathcal{P}(\{x,y\})$ e $\mathcal{P}(\{x,y,z\})$;
   (b) $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ e $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

6. Sia $A := \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   (a) $\emptyset \subset A$;
   (b) $\emptyset \in A$;
   (c) $\{\emptyset\} \subset A$;
   (d) $\{\{\emptyset\}\} \subset A$;
   (e) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in A$;
   (f) $\{\{\{\emptyset\}\}\} \subset A$.

7. Dire per quali insiemi $S \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ le seguenti affermazioni sono vere:
   (a) $\{x \in S : x^2 = 5\} \neq \emptyset$;
   (b) $\{x \in S : |x-1| < \frac{1}{2}\} = \{1\}$;
   (c) $\{x \in S : x^2 = -1\} = \emptyset$.

8. Specificare a parole e poi scrivere in forma tabulare i seguenti insiemi:
   (a) $A = \{x : x^2 = 4\}$;
   (b) $B = \{x : x - 2 = 5\}$;
   (c) $C = \{x : x \text{ è positivo e } x \text{ è negativo }\}$;
   (d) $D = \{x : x \text{ è una lettera nella parola } \textit{corretto} \ \}$.

9. Quali tra i seguenti insiemi sono l'insieme vuoto?
   (a) $A = \{x : x \text{ è una lettera che appare prima della lettera } a \text{ nell'alfabeto}\}$;
   (b) $B = \{x : x^2 = 9 \text{ e } 2x = 4\}$;
   (c) $C = \{x : x \neq x\}$;
   (d) $D = \{x : x + 8 = 8\}$.

10. Come si dimostra che un insieme A non è sottoinsieme di un insieme B? Si provi che $A = \{2, 3, 4, 5\}$ non è un sottoinsieme di $B = \{x : x \text{ è pari}\}$.

11. Siano A, B due insiemi, sottoinsiemi di uno stesso insieme universo U; denotiamo con $X' = U \setminus X$ il complementare dell'insieme X in U. Dimostrare che:

    (a) $B \setminus A \subset A'$;

    (b) $B \setminus A' = B \cap A$.

12. Dati comunque tre insiemi A, B e C, mostrare la validitá delle seguenti proprietà:

    (a) $A \cup A = A$; $A \cap A = A$;

    (b) $A \cup \emptyset = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$;

    (c) $A \cup B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$ e $B = \emptyset$;

    (d) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$;

    (e) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (le operazioni di intersezione e unione sono associative);

    (f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributività dell'intersezione rispetto all'unione);

    (g) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributività dell'unione rispetto all'intersezione)