LOGICA MATEMATICA

Claudia Malvenuto e Roberto Maieli*
Canale E-O - a.a 2003/04
Scheda di esercizi n. 10

17 novembre 2003

Dimostrare che le seguenti sono equivalenze logiche[1] (1 indica la costante booleana "vero", mentre 0 indica la costante booleana "falso"):

1. $A \vee 1 \equiv 1$, (1 è elemento assorbente della disgiunzione);
2. $A \vee 0 \equiv A$, (0 è elemento neutro della disgiunzione);
3. $A \rightarrow 1 \equiv 1$;
4. $A \rightarrow 0 \equiv \neg A$;
5. $A \wedge 1 \equiv A$, (1 è elemento neutro della congiunzione)
6. $A \wedge 0 \equiv 0$, (0 è elemento assorbente della congiunzione)
7. $1 \rightarrow A \equiv A$
8. $0 \rightarrow A \equiv 1$
9. $A \equiv \neg(\neg(A))$, (la negazione è involutiva);
10. $A \equiv (A \wedge A)$, ($\wedge$ è idempotente);
11. $A \vee \neg A \equiv 1$, (principio del terzo escluso);
12. $1 \equiv A \rightarrow A$, (assioma o identità);
13. $\neg A \equiv \neg(A \wedge A)$;

*Dipartimento di Informatica, Università di Roma "La Sapienza", Via Salaria, 113. E-mail: `claudia, maieli@dsi.uniroma1.it`.

[1]Per mostare che due formule A, B sono logicamente equivalenti, $A \equiv B$, occorre mostare che per ogni interpretazione booleana v, $v(a) = v(B)$. Si può procedere in due modi:

- dato che sia A che B sono formule proposizionali, hanno un numero finito di atomi. Possiamo allora enumerare le possibili interpretazioni per A, la tavola di verità di A, e le possibili interpretazioni per B, la tavola di verità di B. Successivamente si confrontano le due tavole: se, per la medesima interpretazione v assegnata agli atomi di A e agli atomi di B, il valore del connettivo principale di A è lo stesso del valore del connettivo principale di B, allora le due formule sono equivalenti;
- in alternativa, si può assumere una valutazione arbitraria v e mostare che $v(A) = v(B)$. In tal caso nella dimostrazione non si deve fare alcuno assunzione particolare sulla valutazione v (questa deve essere generica).

La seconda via produce delle dimostrazioni spesso più veloci e eleganti.

14. $A \equiv A \vee A$, ($\vee$ è idempotente);
15. $A \wedge \neg A \equiv 0$, (contraddizione logica);
16. $\neg A \equiv \neg(A \vee A)$;
17. $A \vee B \equiv B \vee A$, (la $\vee$ è commutativa);
18. $A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$, (principio di inversione);
19. $A \wedge B \equiv B \wedge A$, (la $\wedge$ è commutativa);
20. $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$, (la $\vee$ è associativa);
21. $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$, (la $\wedge$ è associativa);
22. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$, (la $\vee$ distribuisce sulla $\wedge$);
23. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$, (la $\wedge$ distribuisce sulla $\vee$);
24. $A \wedge (A \vee B) \equiv A$;
25. $A \vee (A \wedge B) \equiv A$;
26. $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$;
27. $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$;
28. $A \rightarrow B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$;
29. $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$, (I legge di De Morgan);
30. $A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$, (II legge di De Morgan);
31. $A \vee B \equiv \neg A \rightarrow B$;
32. $A \wedge B \equiv \neg(A \rightarrow \neg B)$.

Si mostri infine che:

1. $p \rightarrow q \not\equiv \neg p \rightarrow \neg q$, (fallacia dell'antecedente);
2. $p \rightarrow q \not\equiv q \rightarrow p$, (fallacia del conseguente);
3. $(p \rightarrow (q \rightarrow p) \not\equiv (p \rightarrow q) \rightarrow p$, (non associatività di $\rightarrow$)