LOGICA MATEMATICA

Claudia Malvenuto e Roberto Maieli*
Canale E-O - a.a 2002-2003
Scheda di esercizi n. 11

17 novembre 2003

Equivalenza logica, Validità, Conseguenza Logica

Notazione : Gli esercizi presentano una notazione leggermente differente a quella del testo di Ben-Ari, dove il simbolo $\leftrightarrow$ indica l'equivalenza logica, da noi, invece, indicata con il simbolo "$\equiv$".
Riportiamo per comodità la notazione relativa ai connettivi della logica classica, caso proposizionale, da noi usati nelle dispense e negli esercizi :

$$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftarrow, \leftrightarrow .$$

Useremo, inoltre, il connettivo $\oplus$ per indicare la *disgiunzione esclusiva* $A \oplus B$ (si tenga presente che data una assegnazione v per gli atomi di $A \oplus B$, diremo che $v(A \oplus B) = V$ se e solo se $v(A) \neq v(B)$).

Esercizio 1 *Dimostrare che* $A \oplus B \equiv \neg(A \leftrightarrow B)$.

Esercizio 2 *Formalizzare le due seguenti proposizioni:*

1. *"Se il tempo è bello, allora, se la macchina è pronta, vado al mare";*
2. *"Se il tempo è bello e la macchina è pronta, allora vado al mare".*

Dimostrare che $1 \equiv 2$.

*Dipartimento di Informatica, Università di Roma "La Sapienza", Via Salaria, 113. E-mail: `claudia, maieli@dsi.uniroma1.it`.

Esercizio 3 *Dimostrare che l'equivalenza logica è una relazione di equivalenza fra proposizioni, ossia è riflessiva, simmetrica e transitiva.*

Esercizio 4 *Dato l'enunciato* $F = ((A \leftrightarrow \neg B) \wedge (\neg A \leftrightarrow B))$, *determinare :*

1. *un enunciato logicamente equivalente ad* F *che contenga solo i connettivi* $\neg, \wedge, \vee$,
2. *l'enunciato equivalente ad* F *che contenga solo* $\neg$ *e* $\wedge$,
3. *l'enunciato equivalente ad* F *che contenga solo i connettivi* $\neg, \vee$.

Esercizio 5 *Verificare l'equivalenze logiche*

$$A \wedge B \equiv \neg(A \to \neg B) \qquad A \vee B \equiv \neg A \to B,$$

e sfruttarle per dimostrare che $\neg, \to$ *formano una base di connettivi.*

Esercizio 6 *Dimostrare i seguenti lemmi.*

Lemma 1 *Sia* A *una formula proposizionale, ed* U *un insieme di formule proposizionali* $\{A_1, ..., A_n\}$, *allora:*

1. A *è soddisfacibile se e solo se* $\not\models \neg A$;
2. *se* U *è soddisfacibile allora* $U - \{A_i\}$, $1 \leq i \leq n$, *è soddisfacibile;*
3. *se* U *è soddisfacibile e* $\models B$ *allora* $U \cup \{B\}$ *è soddisfacibile;*
4. *se* U *è insoddisfacibile e* B *è una formula proposizionale, allora* $U \cup \{B\}$ *è insoddisfacibile;*
5. *se* U *è insoddisfacibile ed esiste una* A_i, *con* $1 \leq i \leq n$, *tale che* $\models A_i$, *allora* $U - \{A_i\}$ *è insoddisfacibile.*
6. *se* $U \models A$ *allora* $U \cup \{B\} \models A$ *per qualsiasi* B;
7. *se* $U \models A$ *e* $\models B$ *allora* $U - \{B\} \models A$;

Lemma 2 *Un* letterale *è un qualsiasi atomo* p *o la sua negazione* $\neg p$ *(diremo ch e* p *e* $\neg p$ *sono* una coppia di letterali complementari. *Si mostri che un insieme di letterali* L *è soddisfacibile se e solo* L *non contiene alcuna coppia di letterali complementari.*

Esercizio 7 *Dire quali delle seguenti formule o insiemi di formule proposizionali sono rispettivamente valide (o tautologie), falsificabili o insoddisfacibili. Dire altresì quali tra quelle indicate sono conseguenze logiche.*

1. $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$;
2. $\{p, \neg q\} \models (p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r)$;
3. $p \wedge (\neg p \vee q)$;
4. $p \rightarrow q \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$;
5. $p \rightarrow q \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$;
6. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow (p \wedge q))$
7. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow (p \vee q))$
8. $(p \wedge q) \leftrightarrow ((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \vee q))$
9. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \wedge q))$

Esercizio 8 *Stabilire se l'enunciato di sinistra è o non è conseguenza logica del corrispettivo enunciato di destra, nella tabella di sotto:*

$\neg(A \wedge B)$	$\neg(A \vee B)$
$A \vee B$	$A \oplus B$
A	$B \rightarrow A$
$B \rightarrow A$	A
$B \rightarrow (A \wedge B)$	A
$A \wedge B \rightarrow \neg C$	$A \wedge \neg B \rightarrow C$
$\neg C \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$
$A \vee B \rightarrow C$	$B \rightarrow C$
$\neg A$	$(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B)$

Esercizio 9 *Quali dei seguenti enunciati sono conseguenza logica delle premesse $A \vee B$ e $A \vee C$?*

1. A,
2. $B \vee C$,
3. $\neg A \rightarrow B \wedge C$,

4. $B \wedge C \to \neg A$,

5. $(\neg C \to A) \wedge (\neg B \to A)$.

Esercizio 10 *Verificare che:*

1. $\{A \to B, B \to C, \neg C\} \models \neg A$;

2. $\{A \to \neg B, C \to B\} \models A \to \neg C$;

3. $\{B \vee C, A \leftrightarrow B\} \models A \vee C$;

4. $\{(A \to B) \to C, A \to \neg B\} \not\models A \to C$;

5. *una qualsiasi tautologia* A *(enunciato valido) è conseguenza logica di un qualsiasi enunciato* B;

6. *un qualsiasi enunciato* A *è conseguenza logica di* $\{B \to C, B \wedge \neg C\}$.