LOGICA MATEMATICA

Claudia Malvenuto e Roberto Maieli*

Canale E-O - a.a 2002-2003

Scheda di esercizi n. 14

17 novembre 2003

Calcolo dei Predicati

Esercizio 1 *Formalizzare le seguenti espressioni lingustiche, nella logica dei predicati, usando costanti e variabili individuali, connettivi e quantificatori:*

1. *a qualcuno piace Simona,*
2. *Simona non piace a nessuno,*
3. *nessuno ama Davide e Davide ama Maria,*
4. *se Davide ama qualcuno, allora ama Maria,*
5. *chiunque ama Davide ama anche Maria,*
6. *chiunque ama Davide se e solo se ama Maria,*
7. *se qualcuno ama Davide allora è amato da Maria,*
8. *chiunque ama Davide o Maria,*
9. *chi ama Maria non ama Davide,*
10. *chiunque ama Davide e Maria, ama se stesso,*

*Dipartimento di Informatica, Università di Roma "La Sapienza", Via Salaria, 113. E-mail: `claudia, maieli@dsi.uniroma1.it`.

11. *solo se qualcuno ama Maria allora tutti sono amati da Davide,*

12. *chiunque si impegna supera l'esame,*

13. *se Aldo capirà la logica, allora tutti gli studenti la capiranno,*

14. *nessuno studente capirà la logica, a meno che Aldo la capisca,*

15. *tutti i professori, tranne quelli di logica, sono noiosi, e qualche professore di logica è noioso,*

16. *se un professore non insegna bene la logica, gli studenti non la capiranno,*

17. *vi è almeno uno studente che capirà la logica e uno studente che sarà apprezzato da tutti i professori,*

18. *ogni professore è apprezzato da qualche studente e qualche professore è apprezzato da tutti gli studenti,*

19. *ogni professore annoia qualche studente e gli studenti che capiscono tutto sono annoiati da ogni professore.*

Esercizio 2 *Data l'interpretazione I che ha dominio $\{2, 3, 6, 9, 18\}$, assegna alle costanti $a := 2$, $b := 3$, $c := 18$ ed interpreta il predicato $P =$ "essere pari" e il predicato $R :=$ "essere multiplo", determinare se le seguenti formule sono vere o false:*

$$
\begin{array}{lll}
P(a), & P(b), & R(a,b), \\
R(a,a), & R(c,a), & \neg P(b) \lor P(c), \\
R(a,c) \to P(a), & R(b,b) \to \neg R(b,a), & \exists x(P(x) \land R(x,c)), \\
\exists x \forall y R(x,y) \land \forall y \exists x R(x,y), & \exists x \forall y R(x,y), & \forall x(P(x) \to R(x,b)) \\
\exists x(R(x,b) \land P(x)), & \forall x R(x,x). &
\end{array}
$$

Esercizio 3 *Supponiamo che in una certa interpretazione I sono vere le seguenti formule:*

$$P(a), P(b), \neg P(c), R(a,b), \neg R(a,c), R(b,c), R(c,c).$$

Quali tra le seguenti formule sono sicuramente false?

$$
\begin{array}{lll}
\forall x P(x), & \neg \exists x R(a,x), & \forall x R(b,x), \\
\forall x \neg R(b,x), & \forall x \neg R(c,x), & \forall x \exists y \neg R(x,y).
\end{array}
$$

Esercizio 4 *Sia I una interpretazione con dominio $D = \{1, 3, 5, 15\}$ e che interpreti i predicati P, R, S, rispettivamente come "essere pari", "essere multiplo" ed "essere $<$" e che infine assegni alle costanti a, b, c, d i valori di D nel modo seguente:*

$$a := 1, b := 3, c := 5, d := 15.$$

Determinare il valore di verità delle seguenti formule:

$\exists y P(y)$,	$\forall x \neg P(x), \forall z R(z, a)$,	
$\forall x R(x, b)$,	$\exists y R(y, d)$,	$\exists z R(c, z)$,
$\exists x S(x, a)$,	$\forall x (P(x) \to R(x, a))$,	$\forall x \exists y S(x, y)$,
$\forall x \forall y R(x, y)$,	$\forall x (R(x, b) \to S(x, c))$,	$\forall x \forall y (S(x, y) \to \neg S(y, x))$,
$\forall x \forall y (R(x, y) \to \neg R(y, x))$,	$\forall x (R(x, c) \vee S(x, c))$,	$\forall x (R(x, b) \vee S(x, b))$.

Esercizio 5 *Dato un dominio $D = \{2, 3, 4\}$ ed un'assegnazione v che interpreti il predicato P come $'' < 4''$ e il predicato Q com $'' > 2''$, si assegnino alle costanti a, b valori del dominio D tali che rendano vere i seguenti insiemi di formule:*

1. $\{P(a) \wedge Q(a), P(b) \wedge \neg Q(b)\}$
2. $\{P(a) \to \forall x P(x), Q(b) \to \forall x Q(x)\}$,
3. $\{P(a) \to \forall x P(x), Q(b) \to \forall x Q(x), P(a) \vee Q(b)\}$.

Esercizio 6 *Determinare per ciascuna delle seguenti formule un'interpretazione che la renda vera ed una che la renda falsa:*

1. $\forall x \exists y P(y, x)$;
2. $\exists x \forall y P(x, y)$;
3. $\exists x P(x) \wedge \exists x \neg P(x)$;
4. $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \wedge \neg \exists (P(x) \wedge Q(x))$;
5. $\forall x (P(x) \to Q(x)) \to \forall x P(x)$;
6. $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \to \neg \forall x (P(x) \vee Q(x))$;
7. $\exists x (P(x) \to Q(x)) \to \exists x (P(x) \wedge Q(x))$.