LOGICA MATEMATICA

Claudia Malvenuto e Roberto Maieli*
Canale E-O - a.a 2002-2003
Scheda di esercizi n. 15

17 novembre 2003

Logica dei predicati

Svolgere i seguenti esercizi usando il *metodo dei tableaux semantici* o il *calcolo dei sequenti di Gentzen.*

Esercizio 1 *Verificare che le seguenti formule sono valide:*

1. $\forall x P(x) \vee \exists x \neg P(x)$;
2. $\forall x P(x) \to \forall z P(z)$;
3. $\neg A x P(x) \to \exists z \neg P(x)$;
4. $P(a) \vee (\forall x P(x) \to Q(a)$;
5. $\exists x P(x) \vee \forall (P(x) \to Q(x)$;
6. $\forall x \neg (P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \exists x \neg (P(x) \to Q(x)$;
7. $\forall x \neg (P(x) \vee Q(x)) \vee \neg \exists x (P(x) \wedge Q(x))$;
8. $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \to (\exists x \neg P(x) \to \exists x Q(x))$;
9. $\forall y (\forall x P(x) \to P(y))$;

*Dipartimento di Informatica, Università di Roma "La Sapienza", Via Salaria, 113. E-mail: `claudia, maieli@dsi.uniroma1.it`.

10. $\forall y(P(y) \to \exists x P(x))$;

11. $\exists y(P(y) \to \forall x P(x))$;

12. $\exists y(\exists x P(x) \to P(y)$;

13. $\forall x \forall y(P(x) \to Q(y)) \to \forall x(P(x) \to \forall y Q(y))$;

14. $(\exists x P(x) \to \forall x P(x)) \to \forall x P(x) \to \forall z P(z))$;

15. $\exists x \forall y R(x, y) \to \exists x R(x, x)$;

16. $\exists x R(x, x) \to \exists x \exists y R(x, y)$;

17. $\exists x \exists y(R(x, y) \vee R(y, x)) \to \exists x \exists y R(x, y)$;

18. $\forall x \forall y(R(x, y) \vee R(y, x)) \to \forall x R(x, x)$.

Esercizio 2 *Verificare che le seguenti formule non sono valide:*

1. $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \to \exists x(P(x) \wedge Q(x)$;
2. $\forall x(p(x) \vee Q(x) \to \forall x P(x) \vee Q(x)$;
3. $(\forall x P(x) \to Q(a)) \to \forall x(P(x) \to Q(a))$;
4. $(\forall x P(x) \to \forall x Q(x)) \to \forall x(P(x) \to Q(x))$;
5. $(\exists x P(x) \to Q(a) \to \exists x(P(x) \to Q(a))$;
6. $\exists x(P(x) \to Q(x)) \to (\exists x P(x) \to \exists x Q(x))$;
7. $\forall x P(x) \vee \forall x \neg P(x)$;
8. $\forall x \neg P(x) \vee \neg \exists x P(x)$;
9. $\forall x(P(x) \wedge Q(x) \to M(x)) \to \forall x(P(x) \to Q(x) \wedge M(x))$;
10. $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \to \forall x(P(x) \vee Q(x))$;
11. $\exists x \neg P(x) \wedge \exists x \neg Q(x) \to \neg \exists x(P(x) \vee Q(x))$;
12. $\exists x(P(x) \to Q(x)) \to \forall x(P(x) \to Q(x))$;
13. $\forall x(P(x) \to Q(x)) \wedge \exists x P(x) \to \forall x Q(x)$;

14. $\forall x(P(x) \to Q(x)) \to \forall x(P(x) \to \forall y Q(y))$;

15. $\forall x(P(x) \to \forall y R(x,y)) \to \exists x(P(x) \to \neg\forall y R(x,y))$;

16. $\forall y(\exists x R(x,y) \to \exists x R(x,x)$;

17. $\forall x(R(a,x) \leftrightarrow S(a,x)) \wedge \neg R(a,b) \to \neg S(b,a)$;

18. $\forall x \neg\forall y R(x,y) \to \neg\forall y R(y,y)$;

19. $\forall x \exists y R(x,y) \to \exists y \forall x R(x,y)$ *(attenzione, l'albero procede all'infinito!)*;

20. $\neg\forall x(P(x) \to \exists y R(y,x)) \vee \forall x \neg P(x))$ *(attenzione, l'albero procede all'infinito!)*.

Esercizio 3 *Verificare le conseguenze logiche:*

1. $\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall x P(x) \models Q(a)$;

2. $\forall x(P(x) \to Q(x)), \neg\exists x Q(x) \models \neg Q(a)$;

3. $\neg\forall x(P(x) \to Q(x)), \neg\exists x P(x) \models \exists x Q(x)$;

4. $\exists x(P(x) \vee Q(x)), \forall x(P(x) \to \neg Q(x)), \forall x(Q(x) \to \neg P(x)) \models \exists x \neg(P(x) \wedge Q(x))$;

5. $\forall x(R(b,x) \to R(x,b)), \forall x(P(x) \to \neg R(x,b)) \models \neg\exists x(P(x) \wedge R(b,x))$;

6. $\forall x(R(b,x) \to R(x,b)), \exists x(P(x) \wedge \neg R(x,b)) \models \exists x(P(x) \wedge \neg R(b,x))$;

7. $\forall x(P(x) \to R(b,x)), \forall x(Q(x) \to \neg R(b,x)), Q(c) \models \exists x \neg P(x)$;

8. $\forall x(P(x) \to \exists y R(y,x)), \forall x \forall y \neg R(x,y) \models \forall x \neg P(x)$;

9. $\forall x \neg P(x), \exists y R(a,y) \to \exists x P(x) \models \forall y \neg R(a,y)$;

10. $\forall x(P(x) \wedge Q(x) \to T(x)), \forall y Q(y) \wedge \neg\forall z S(z,a) \models \forall z(P(z) \to T(z))$.

Esercizio 4 *Verificare che non sono conseguenze logiche:*

1. $\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall x Q(x) \models P(a)$;

2. $P(a) \to Q(b), \forall x \neg P(x) \models \neg Q(b)$;

3. $\neg\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \models \neg P(a)$;

4. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \exists x M(x), \forall x(M(x) \rightarrow Q(x)) \models \forall x(\neg P(x) \vee Q(x))$;

5. $\exists x P(x), \forall x(P(x) \rightarrow R(x,x)) \models \exists x(P(x) \wedge \forall y R(x,y))$.

Esercizio 5 *Verificare che i seguenti insiemi di formule non sono soddisfacibili:*

1. $\{\forall x\forall y(Q(x) \wedge R(x) \rightarrow P(y)), \exists x Q(x), \forall x R(x) \rightarrow \forall y Q(y)\}$;

2. $\{\exists x P(x) \wedge \exists x\neg P(x), \exists x P(x) \rightarrow \forall x\neg P(x)\}$

3. $\{\neg\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \neg\exists x P(x), \neg\exists x Q(x)\}$

4. $\{\exists x\exists y(Rx,y) \vee R(y,x)), \neg\exists x\exists y R(x,y)\}$.

Esercizio 6 *Verificare che i seguenti insiemi di formule sono soddisfacibili:*

1. $\{\exists x P(x), \exists x Q(x), \neg\forall x(P(x) \vee Q(x)\}$;

2. $\{\forall x\forall y(Q(x) \wedge R(x) \rightarrow P(y)), \exists x Q(x), \neg(R(a) \rightarrow \forall y P(y))\}$;

3. $\{\forall x\forall y(Q(x) \wedge R(x) \rightarrow P(y)), \exists x Q(x), \neg\forall y(P(y) \rightarrow \exists x R(x))\}$;

4. $\{\forall x\exists y R(x,y), \neg\forall z R(z,z)\}$.

Esercizio 7 *Ricordiamo che una relazione R è:*

- *riflessiva se e solo se* $\forall x R(x,x)$;
- *irriflessiva se e solo e* $\forall x\neg R(x,x)$;
- *simmetrica se e solo se* $\forall x\forall y(R(x,y) \rightarrow R(y,x))$;
- *asimmetrica se e solo se* $\forall x\forall y(R(x,y) \rightarrow \neg R(y,x))$;
- *antisimmetrica se e solo se* $\forall x\forall y(R(x,y) \wedge R(y,x) \rightarrow x = y)$;
- *transitiva se e solo se* $\forall x\forall y\forall z(R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$;
- *intransitiva se e solo e* $\forall x\forall y\forall z(R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow \neg R(x,z))$.

Verificare che:

1. *ogni relazione asimmetrica è irriflessiva;*
2. *ogni relazione asimmetrica è antisimmetrica;*
3. *ogni relazione irriflessiva e transitiva è asimmetrica;*
4. *ogni relazione intransitiva è irriflessiva;*
5. *ogni relazione simmetrica e antisimmetrica è transitiva;*
6. *ogni relazione transitiva e intransitiva è asimmetrica;*
7. *ogni relazione transitiva e irriflessiva è asimmetrica;*
8. *non è detto che una relazione transitiva e simmetrica sia anche riflessiva.*