LOGICA MATEMATICA

Claudia Malvenuto
Canale E-O
Scheda esercizi n. 3

31 ottobre 2005

Tutto, laggiù, è ordine e bellezza,
lusso, calma e voluttà. [1]

1. Definiamo la *differenza simmetrica* di due insiemi A e B come

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

   Si provi che $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

2. Sia data una relazione $\rho = (R, X)$, dove $R \subseteq X \times X$, e sia $\rho^{-1} = (R^{-1}, X)$ la relazione inversa, dove $R^{-1} := \{(a, b) : (b, a) \in R\}$. Mostrare che:

   (a) $R \cap R^{-1} = \emptyset \Rightarrow \rho$ antisimmetrica;

   (b) non è vero il viceversa di (a) (dare un esempio!)

3. Sia ρ un ordinamento parziale. La relazione inversa ρ^{-1} è ancora un ordinamento parziale?

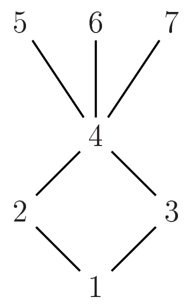
4. Si dica se le due seguenti relazioni $\leq$ e $\leq'$ sono ordinamenti parziali su $\mathbb{Z}$:

   (a) $x \leq y \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{Z} : x + a = y$

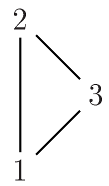
[1] Là, tout n'est qu'ordre et beauté,/ luxe, calme et volupté. [...]
(L'invitation au voyage, di Charles Baudelaire, in 'Les fleurs du mal')

(b) $x \leq' y \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{N} : x + a = y$

5. Si calcolino elementi massimali, minimali, massimi e minimi, catene massimali dell'insieme parzialmente ordinato il cui diagramma di adiacenza (detto anche diagramma di Hasse) è dato da:



6. Determinare tutti i possibili ordinamenti parziali sull'insieme $A = \{1, 2, 3\}$ e disegnarne il relativo diagramma di Hasse. Esiste un ordinamento parziale su A il cui diagramma di Hasse è il seguente?



7. Mostrare che

   (a) in $\mathbb{Z}$ la relazione di divisibilità:

   $$x|y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } xk = y$$

   non è una relazione d'ordine (quale delle proprietà manca?).

   (b) in $\mathbb{N}$ la relazione di divisibilità:

   $$x|y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \text{ tale che } xk = y$$

   è una relazione d'ordine, ma non totale.

8. Si costruisca il diagramma di Hasse della relazione di divisibilità sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, determinando eventuali massimi, minimi, elementi massimali e minimali.

9. Mostrare che l'insieme $X := \{x \in \mathbb{N} : x \geq 2\}$, ordinato tramite la relazione di divisibilità, ha infiniti elementi minimali (quali?) ma non ha elementi massimali (perché?).

10. Dato un insieme S con almeno due elementi, nell'insieme $X := \mathcal{P}(S)$ la relazione di inclusione insiemistica $\subseteq$ definisce una relazione d'ordine parziale.

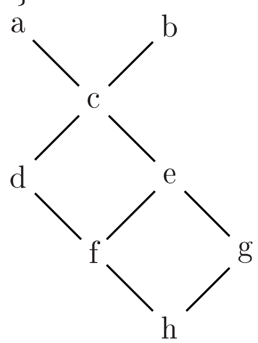
    (a) Mostrare che $(X, \subseteq)$ è un insieme ordinato ma non totalmente ordinato.

    (b) Disegnare il diagramma di Hasse di $(X, \subseteq)$ per $S = \{1, 2\}$.

    (c) Disegnare il diagramma di Hasse di $(X, \subseteq)$ per $S = \{1, 2, 3\}$.

11. Determinare, se esistono, i maggioranti, i minoranti, l'estremo superiore e l'estremo inferiore di un sottoinsieme Y di un insieme ordinato $(X, \leq)$ nei seguenti casi

    (a) $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ con l'ordinamento descritto dalla figura seguente e $Y = \{d, f, e\}$



    (b) $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ con l'ordinamento descritto dalla figura seguente e $Y = \{b, c, d\}$