LOGICA MATEMATICA

Claudia Malvenuto
Canale E-O
Scheda esercizi n. 4

31 ottobre 2005

Sí, tutto con eccesso!
la luce, la vita, il mare!
Plurale tutto, plurale,
luci, vite e mari.
Che salgano, che ascendano
da dozzine a centinaia,
da centinaia a migliaia,
in un'esultante
ripetizione infinita,
del tuo amore, unità. [...]
(La voce a te dovuta, Pedro Salinas)

1. Quando una relazione *non* è riflessiva? quando *non* è simmetrica? antisimmetrica? transitiva?

2. Trovare tutte le partizioni (insiemistiche) dell'insieme $A = \{a, b, c\}$ a 3 elementi.

3. Trovare tutte le partizioni dell'insieme a 4 elementi $A = \{a, b, c, d\}$.

4. Sia ρ una relazione simmetrica e transitiva su un insieme A. Si provi che ρ è una relazione di equivalenza se e solo se vale la seguente proprietà:

$$\forall a \in A \ \exists \ b \in A : a\rho b.$$

5. Sia P l'insieme dei punti del piano. Sia ρ la relazione su P così definita: $p_1 \rho p_2$ se e solo se i punti p_1 e p_2 sono equidistanti da un fissato punto O. Si provi che ρ è una relazione d'equivalenza su P e si determini l'insieme quoziente P/ρ.

6. **Definizione costruttiva di $\mathbb{Z}$ a partire da $\mathbb{N}$**
   Definiamo in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relazione
   $$(m, n) \sim (m', n') \Leftrightarrow m + n' = n + m'.$$
   (a) Verificare che $\sim$ è una relazione d'equivalenza.
   (b) Verificare che le coppie del tipo $(m, 0), (0, n), (0, 0)$, con $m, n \neq 0$ sono un insieme di rappresentanti per le classi di $\sim$–equivalenza.
   (c) Sia $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$. Si definisca in $\mathbb{Z}$ un'operazione di **somma** ponendo
   $$[(x, y)] + [(x', y')] := [(x + x', y + y')].$$
   Si dimostri che l'operazione di somma è ben definita (ovvero, pur essendo definita sui rappresentanti delle classi, non dipende dalla scelta di tali rappresentanti).

7. **Definizione costruttiva di $\mathbb{Q}$ a partire da $\mathbb{Z}$**
   Definiamo in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ (dove $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) la relazione
   $$(m, n) \sim (m', n') \Leftrightarrow mn' = nm'.$$
   (a) Verificare che $\sim$ è una relazione d'equivalenza.
   (b) Verificare che le coppie del tipo $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, con m ed n primi tra loro, sono un insieme di rappresentanti per le classi di $\sim$–equivalenza.
   (c) Sia $\mathbb{Q} := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\sim$. Si definisca in $\mathbb{Q}$ un'operazione di **somma** ponendo
   $$[(x, y)] + [(x', y')] := [(xy' + x'y, yy')].$$
   Si dimostri che l'operazione di somma è ben definita (ovvero, pur essendo definita sui rappresentanti delle classi, non dipende dalla scelta di tali rappresentanti).

(d) Si definisca in $\mathbb{Q}$ un'operazione di **prodotto** ponendo

$$[(x, y)] \cdot [(x', y')] := [(xx', yy')].$$

Si dimostri che l'operazione di prodotto è ben definita (ovvero, pur essendo definita sui rappresentanti delle classi, non dipende dalla scelta di tali rappresentanti).

8. Mostrare che se $\{X_i : i \in I\}$ è una partizione di un insieme X e $\{Y_j : j \in J\}$ è una partizione di un insieme Y, allora $\{X_i \times Y_j : (i, j) \in I \times J\}$ è una partizione di $X \times Y$.

9. Mostrare che le seguenti relazioni sono relazioni d'equivalenza, descriverne il relativo insieme quoziente e un insieme di rappresentanti per il quoziente:

   (a) in $\mathbb{Z}$, la relazione $x \rho x' \Leftrightarrow |x| = |x'|$;

   (b) in $\mathbb{Z}$, la relazione: *x ha la stessa parità di x'* (cioè o sono entrambi pari, o entrambi dispari);

   (c) in $\mathbb{R}$ la relazione: *x differisce per un multiplo intero di 2π* da x' (cioè, $x = x' + 2k\pi$, per qualche $k \in \mathbb{Z}$);

   (d) in $\mathbb{R}$, la relazione: *x ha la stessa parte intera inferiore di x'* (cioè $\lfloor x \rfloor = \lfloor x' \rfloor$);

   (e) in $\mathbb{R}$, la relazione *x differisce per un intero* da x' (cioè $x = x' + k$, per qualche $k \in \mathbb{Z}$);

   (f) fissato un insieme S finito e non vuoto, in $X = \mathcal{P}(S)$ la relazione *x ha lo stesso numero di elementi* di x'.

10. Sia $\rho = (R, X)$ una relazione. Mostrare che ρ è una relazione di equivalenza se e solo se ρ^{-1} è una relazione di equivalenza.

11. Determinare tutte le relazioni di equivalenza dell'insieme $A = \{a, b, c\}$.

12. Trovare il più piccolo intero naturale congruo a ciascuno dei seguenti numeri, modulo l'intero indicato: 16(modulo 3); 16(modulo 7); 35(modulo 2); 117(modulo 32); 121(modulo 111); 312(modulo 60).

13. Sia $n \geq 2$ e siano $a, b \in \mathbb{Z}$. Mostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(a) $a \equiv b \pmod n$;

(b) a e b hanno lo stesso resto nella divisione per n;

(c) $b \in \{a + nk : k \in \mathbb{Z}\}$;

(d) $\{a + nk : k \in \mathbb{Z}\} = \{b + nh : h \in \mathbb{Z}\}$.

14. Sia $n \geq 2$ fissato. Mostrare che:

    (a) $a \equiv b \pmod n, c \equiv d \pmod n \Rightarrow a + c \equiv b + d \pmod n$;

    (b) $a \equiv b \pmod n, c \equiv d \pmod n \Rightarrow ac \equiv bd \pmod n$;

    (c) $a \equiv b \pmod n \Rightarrow a^k \equiv b^k \pmod n$ per ogni $k \in \mathbb{N}$;

    (d) $a \equiv b \pmod n,\ m \mid n \Rightarrow a \equiv b \pmod m$;

    (e) $a \equiv b \pmod n,\ m \neq 0 \Rightarrow am \equiv bm \pmod{mn}$;

    (f) $a \equiv b \pmod n, d \neq 0,\ d \mid a, d \mid b, d \mid n \Rightarrow a/d \equiv b/d \pmod{n/d}$;

    (g) $ac \equiv bc \pmod n, d = \mathrm{MCD}(c, n) \Rightarrow a \equiv b \pmod{n/d}$;

    (h) $ac \equiv bc \pmod n, \mathrm{MCD}(c, n) = 1 \Rightarrow a \equiv b \pmod n$;

    (i) $ac \equiv bc \pmod p, p$ primo, p non divide $c \Rightarrow a \equiv b \pmod p$;

    (j) $a \equiv b \pmod n, a \equiv b \pmod m \Rightarrow a \equiv b \pmod{\mathrm{mcm}(n, m)}$.

    Si noti che, in (h), la condizione sul MCD è essenziale per effettuare la cancellazione (dare un esempio in cui non si può effettuare la cancellazione).

15. Verificare che

    (a) il quadrato di ogni intero è congruo a 0 oppure a 1 (mod 4);

    (b) il quadrato di ogni intero è congruo a 0, oppure a 1, oppure a 4 (mod 8).

16. Fissati $n \geq 2$ ed $a \in \mathbb{Z}$, si dice **inverso aritmetico** di $a \pmod n$ un elemento $a^* \in \mathbb{Z}$ (se esiste) tale che

    $$aa^* \equiv 1 \pmod n.$$

    Mostrare che a ammette inverso aritmetico (mod n) $\Leftrightarrow \mathrm{MCD}(a, n) = 1$.