LOGICA MATEMATICA

Claudia Malvenuto
Canale E-O
Scheda esercizi n. 8

20 novembre 2005

Bisogna stancare i numeri.
Che contino senza posa,
che si ubriachino contando,
e che non sappiano più
l'ultimo quale sarà:
che vita senza termine! [...]
(La voce a te dovuta, Pedro Salinas)

1. Trovare una biiezione esplicita tra $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ per provare che questi due insiemi sono equipotenti.

2. Siano $R = \{1, 2, 5, 8\}$ e $S =${Marco, Laura, Giovanni, Luca}. Esiste una biiezione da R a S?

3. Dati $M = \{1, 2, 3\}$ e $N = \{1, 2\}$, elencare tutte le funzioni da M a N. Questi due insiemi sono equipotenti?

4. Gli intervalli $G = [0, 1]$ e $H = [2, 5]$ sono equipotenti?

5. La sequenza $\{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$ è numerabile?

6. La sequenza $\{(1, 1), (4, 8), (9, 27), \ldots, (n^2, n^3), \ldots\}$ è numerabile? In generale, data una sequenza infinita $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$, esiste una biiezione dai numeri naturali agli elementi della sequenza?

7. Usando il metodo della diagonalizzazione di Cantor, dimostrare che $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$.

8. Dimostrare che la funzione

$$f : (0, 1) \to (a, b) : x \mapsto a + (b - a)x$$

è una biiezione tra i due intervalli aperti (a, b) e $(0, 1)$, trovando esplicitamente la funzione inversa f^{-1}. Si deduca (usando quale proprietà dell'equipotenza $\sim$?) che tutti gli intervalli aperti sono equipotenti.

9. Dimostrare che la funzione
$$g : (-1, 1) \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$
è una biiezione tra l'intervallo aperto $(-1, 1)$ e i numeri reali $\mathbb{R}$, trovando esplicitamente la funzione inversa $g^{-1} : \mathbb{R} \to (0, 1)$.

10. Descrivere un sottoinsieme numerabile dell'intervallo reale $(0, 1)$ (questo dimostra che l'intervallo $(0, 1)$ ha almeno la potenza del numerabile).

11. Descrivere una biiezione esplicita $f : (0, 1) \to [0, 1)$ tra l'intervallo reale aperto $(0, 1)$ e l'intervallo chiuso a a sinistra $[0, 1)$, utilizzando un sottoinsieme numerabile $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$ di $(0, 1)$. (*Suggerimento*: si costruisca la biiezione f incollando la biezione identità $id : (0, 1) \setminus A \to (0, 1) \setminus A$ ad una biiezione di $A \to A \cup \{0\}$.

12. Dimostrare che l'intervallo della retta reale $[0, 1)$ ha potenza superiore al numerabile (la *potenza del continuo*). (Suggerimento: si usi la scrittura in base 10: ogni elemento $x \in [0, 1)$ si scrive nella forma $0, x_1 x_2 x_3 \ldots$, dove x_i sono le cifre decimali dopo la virgola di x).

13. Dimostrare che: (a) $[0, 1] \sim (0, 1)$; (b) $[0, 1] \sim [0, 1)$; (c) $[0, 1] \sim (0, 1]$.

14. Dimostrare che ciascuno dei seguenti intervalli, in cui $a < b$, non è numerabile: (a) $[a, b]$, (2) (a, b), (c) $[a, b)$, (d) $(a, b]$.

15. Usando gli esercizi precedenti, provare che l'insieme dei numeri reali ha la potenza del continuo.