METODI MATEMATICI PER L'INFORMATICA

Canale E–O a.a. 2008–09

Docente: C. Malvenuto

Primo compito di esonero – 26 novembre 2008

Istruzioni.

- Completare subito la parte inferiore di questa pagina con il proprio nome, cognome e firma.
- Scrivere solamente su questi fogli, anche dietro se occorre, a penna o a matita. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
- Tutte le risposte vanno **motivate**.
- **NON PARLARE** pena il ritiro immediato del compito.

ESERCIZIO	PUNTEGGIO
1	/10
2	/10
3	/5
4	/15
5	/15
6	/15
7	/15
8	/15
TOTALE	/100

Nome e Cognome ↓	**Firma ↓**

Esercizio 1. *(10 punti)*

1. Dare la definizione di uguaglianza tra due insiemi A e B.
2. Siano A un insieme e $\emptyset$ l'insieme vuoto. Dimostrare che

$$A \cup \emptyset = A.$$

1. Due insiemi A e B si dicono uguali se ogni elemento di A è anche elemento di B e viceversa; equivalentemente, si dice che un insieme A è incluso in B ($A \subseteq B$) se ogni elemento di A è elemento di B; A e B si diranno quindi uguali se A è incluso in B e B è incluso in A.
2. Per dimostrare l'uguaglianza, dimostriamo le due inclusioni $A \cup \emptyset \subseteq A$ e $A \cup \emptyset \supseteq A$.

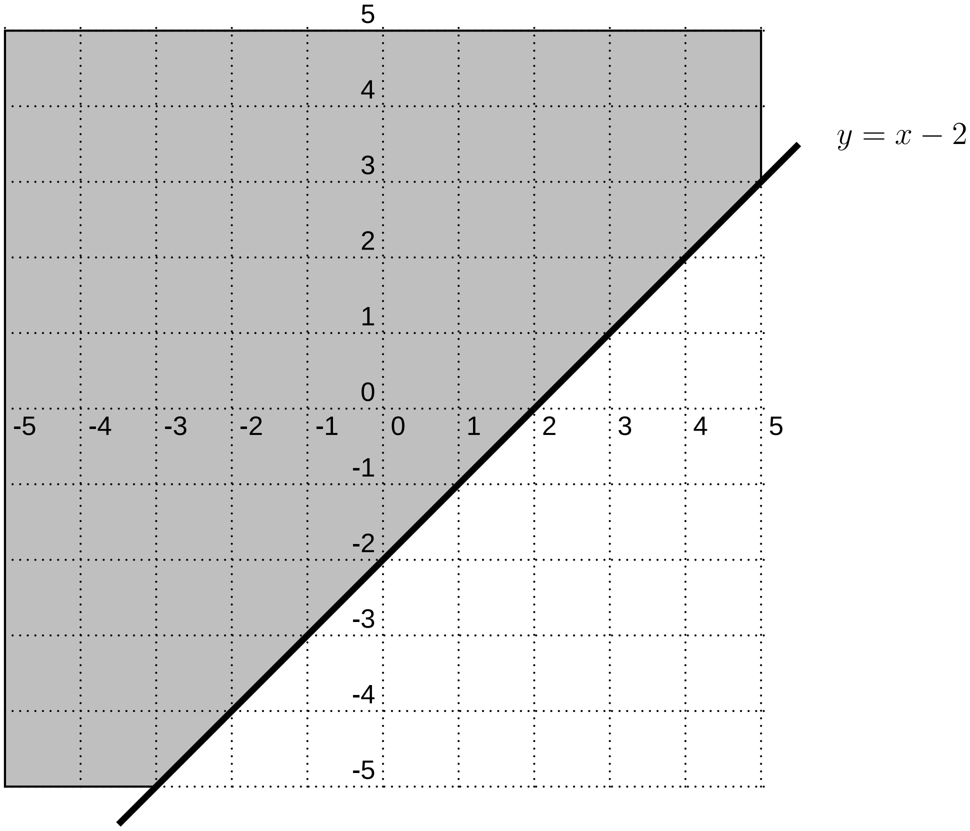
   ($\subseteq$) Se $x \in A \cup \emptyset$, allora $x \in A$ oppure $x \in \emptyset$. Nel primo caso abbiamo finito (perché dobbiamo appunto mostrare che $x \in A$); il secondo caso non è mai verificato (perché l'insieme vuoto, per definizione, non contiene elementi).

   ($\supseteq$) Ogni insieme è contenuto nella sua unione con qualsiasi insieme (in simboli, per qualunque insieme B è vero che $A \cup B \supseteq A$); in particolare, $A \cup \emptyset \supseteq A$.

Esercizio 2. *(10 punti)*

1. Disegnare, utilizzando il piano cartesiano in figura, il grafico della relazione ρ sull'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali definita da

$$x \rho y \quad \Leftrightarrow \quad y \geq x - 2.$$



   Il grafico è costituito dalla zona grigia e dalla retta evidenziata, che sono costituiti appunto dai punti di coordinate (x, y) per i quali si ha $y \geq x - 2$.

2. Dire se la relazione è riflessiva e perché.

   La relazione è riflessiva perché per ogni x è vero che $x \geq x - 2$. (Graficamente la riflessività si può interpretare osservando che il grafico contiene la bisettrice del primo e terzo quadrante.)

3. Dire se la relazione è simmetrica e perché.

   La relazione non è simmetrica: infatti un controesempio si ottiene scegliendo $x = 0$ e $y = 3$. In tal caso è vero che $x \rho y$, perché $y = 3 \geq -2 = x - 2$, mentre non si ha $y \rho x$, perché $x = 0$ non è maggiore o uguale di $y - 2$, cioè 1.

Esercizio 3. *(5 punti)* Sia A un insieme e $\rho = (R, A)$, con $R \subseteq A \times A$, una relazione su A. Dare le condizioni perché ρ sia antisimmetrica.

La relazione ρ è antisimmetrica se, comunque si scelgano due elementi a e b nell'insieme A tali che $a \rho b$ e $b \rho a$, si ha $a = b$.

Esercizio 4. *(15 punti)* Sia data la relazione sull'insieme $A = \mathbb{N}$ dei numeri naturali definita da

$$m \sim n \Leftrightarrow \text{ l'ultima cifra di } m \text{ è uguale all'ultima cifra di } n;$$

Per esempio, in questa relazione si ha $23 \sim 173$, mentre $18 \not\sim 21$.

1. Mostrare che $\sim$ è una relazione d'equivalenza.

2. Descrivere la classe di equivalenza dell'elemento 12 e l'insieme quoziente $\mathbb{N}/\sim$ associato alla relazione (cioè descrivere le classi di equivalenza e la partizione associata).

3. Trovare un insieme di rappresentanti per $\mathbb{N}/\sim$.

1. Perché $\sim$ sia una relazione d'equivalenza dev'essere riflessiva, simmetrica e transitiva. Per la relazione data queste tre proprietà derivano dalle corrispondenti proprietà dell'uguaglianza tra numeri naturali: infatti l'ultima cifra di un numero è uguale a sé stessa; se l'ultima cifra di m è uguale all'ultima cifra di n ne segue che l'ultima cifra di n è uguale all'ultima cifra di m; e se l'ultima cifra di m è uguale all'ultima cifra di n e l'ultima cifra di n è uguale all'ultima cifra di p, allora l'ultima cifra di m è uguale all'ultima cifra di p. (Si noti che la relazione data coincide con la relazione di congruenza modulo 10 su $\mathbb{N}$.)

2. La classe di equivalenza dell'elemento 12 è costituita da tutti i numeri naturali che hanno come ultima cifra 2: 2, 12, 22, 32, ... Si può scrivere

   $$[12]_\sim = \{2 + 10k \ : \ k \in \mathbb{N}\}.$$

   L'insieme quoziente, cioè l'insieme delle classi di equivalenza, contiene una classe per ognuna delle possibili ultime cifre di un numero naturale: quindi, una classe che contiene tutti i numeri che hanno come ultima cifra 0, una che contiene tutti i numeri che hanno come ultima cifra 1 e così via, fino alla classe dei numeri che finiscono per 9. In simboli, $\mathbb{N}/\sim = \{[0]_\sim, [1]_\sim, \ldots, [9]_\sim, \}$. Queste 10 classi danno la partizione di $\mathbb{N}$ associata alla relazione $\sim$.

3. Basta prendere un elemento in ognuna delle classi descritte nel punto precedente: la scelta più semplice è data dagli elementi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (ma andrebbe bene anche qualsiasi altra scelta: per esempio 870 come rappresentante di $[0]_\sim$, 31 come rappresentante di $[1]_\sim$, 1000002 come rappresentante di $[2]_\sim$ e così via).

Esercizio 5. *(15 punti)* Per ognuna delle seguenti relazioni $f \subseteq A \times B$, dove $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{x, y, z\}$, dire se è una funzione, e in caso positivo determinare se è iniettiva e se è suriettiva.

1. $f = \{(1, y), (2, y), (2, z), (3, x), (3, y), (3, z)\}$;
2. $f = \{(1, y), (2, x), (3, z)\}$;
3. $f = \{(1, z), (2, x)\}$;
4. $f = \{(3, y), (1, y), (2, x)\}$.

1. Non è una funzione perché a qualche elemento di A è associato più di un elemento di B (per esempio, all'elemento 2 di A sono associati sia y che z).
2. È una funzione perché a ogni elemento di A è associato esattamente un elemento di B. Questa funzione è iniettiva (perché i secondi elementi delle tre coppie, cioè le immagini degli elementi di A, sono tutti distinti) e suriettiva (perché ogni elemento di B compare come secondo elemento in almeno una coppia, cioè è immagine di almeno un elemento di A). [Si osservi che quando si ha un'applicazione definita tra due insiemi finiti con lo stesso numero di elementi, come in questo caso, l'applicazione è iniettiva se e solo se è suriettiva.]
3. Non è una funzione perché c'è un elemento di A, l'elemento 3, che non compare in alcuna coppia.
4. È una funzione perché, come sopra, a ogni elemento di A è associato esattamente un elemento di B (ovviamente non ha importanza l'ordine in cui le coppie sono elencate). Questa volta la funzione non è iniettiva (perché sia 1 che 3 hanno come immagine l'elemento y) né suriettiva (perché z non è immagine di alcun elemento di A).

Esercizio 6. *(15 punti)* Sia $X = \{1,2,3,4\}$ e sia $f : X \times X \to \{2,3,4,5,6,7,8\}$ l'applicazione così definita:

$$f((x,y)) = x + y.$$

(Per esempio, $f((2,4)) = 6$.)

1. Determinare $f^{-1}(4)$.
2. Determinare l'immagine di f.
3. Dire se l'applicazione f è iniettiva, suriettiva, biunivoca.

1. L'insieme $f^{-1}(4)$, cioè la controimmagine di 4, è costituito da tutti gli elementi del dominio la cui immagine è 4, ossia da tutte le coppie $(x,y) \in X \times X$ tali che $x + y = 4$. Quindi si ha:

$$f^{-1}(4) = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}.$$

2. L'immagine di f è costituita da tutti i numeri che si possono ottenere sommando in tutti i possibili modi due elementi di X. Quindi l'elemento 2 appartiene all'immagine perché è $f((1,1)) = 1 + 1$, l'elemento 3 vi appartiene perché è $f((1,2))$, e così via fino a $8 = f((4,4))$.
3. L'applicazione f non è iniettiva perché accade che elementi distinti di $X \times X$ abbiano la stessa immagine: per esempio, come si è visto nel primo punto, tre elementi distinti hanno come immagine 4. È suriettiva perché, per quanto detto nel secondo punto, la sua immagine coincide con l'intero codominio. Non essendo iniettiva, la f non è suriettiva.

Esercizio 7. *(15 punti)* Dimostrare per induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq 1$, vale l'uguaglianza

$$\sum_{k=1}^{n}(k \cdot k!) = (n+1)! - 1.$$

Sia $P(n)$ l'uguaglianza $\sum_{k=1}^{n}(k \cdot k!) = (n+1)! - 1$.

(Passo base) Per $n = 1$, l'uguaglianza data, $P(1)$, diventa $\sum_{k=1}^{1}(k \cdot k!) = (1+1)! - 1$, cioè $1 = 1$.

(Ipotesi induttiva) Sia $n \geq 0$ tale che $P(n)$ è vera, cioè

$$\sum_{k=1}^{n}(k \cdot k!) = (n+1)! - 1.$$

(Passo induttivo) Mostriamo che $P(n+1)$ è vera:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(k \cdot k!) &= \sum_{k=1}^{n}(k \cdot k!) + (n+1)(n+1)! \\
&= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! \\
&= (n+2)(n+1)! - 1 \\
&= (n+2)! - 1.
\end{aligned}$$

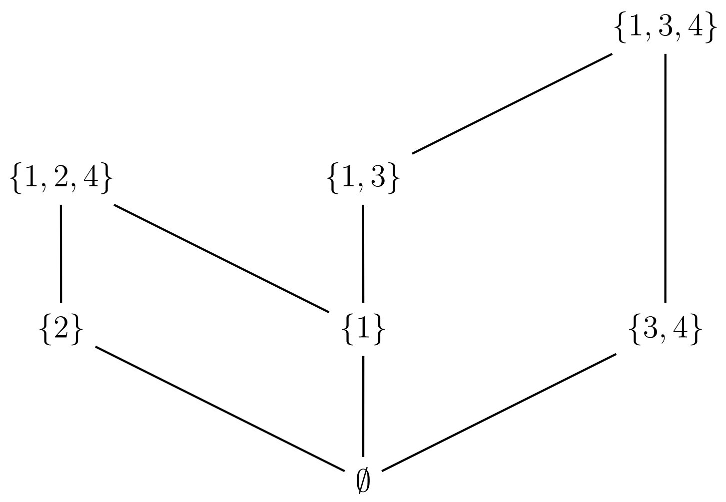
Questo mostra che, per ogni $n \geq 1$, si ha $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Per il principio di induzione segue che l'uguaglianza è vera per ogni $n \geq 1$.

Esercizio 8. *(15 punti)* Sia dato l'insieme $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e la famiglia di sottoinsiemi $X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}\}$; su X si consideri l'ordine parziale dato dall'inclusione insiemistica $\subseteq$.

1. Si disegni il diagramma di Hasse dell'insieme parzialmente ordinato $(X, \subseteq)$.
2. Si determinino gli insiemi degli elementi minimali e massimali e, se esistono, il massimo e il minimo di $(X, \subseteq)$.
3. Si scrivano una catena massimale e una catena non massimale di $(X, \subseteq)$.

1. Il diagramma richiesto è:



2. L'unico elemento minimale è $\emptyset$, che è anche quindi anche l'elemento minimo: è incluso in ognuno degli altri sottoinsiemi. Gli elementi massimali sono $\{1, 2, 4\}$ e $\{1, 3, 4\}$, perché non sono inclusi in nessuno degli altri sottoinsiemi; essendoci due elementi massimali, non c'è un massimo (infatti nessuno dei due include tutti gli altri sottoinsiemi dati).
3. Una catena massimale (cioè tale che non esista nessun'altra catena che la comprenda strettamente) è $\{\emptyset, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}\}$; altri esempi sono dati da $\{\emptyset, \{1\}, \{1, 3\}, \{1, 3, 4\}\}$ e $\{\emptyset, \{1\}, \{1, 2, 4\}\}$ (si ricordi che le catene massimali non hanno necessariamente tutte la stessa cardinalità). Esempi di catene non massimali sono dati dalla catena vuota, da quelle composte da un solo insieme o, per esempio, da $\{\emptyset, \{1\}, \{1, 3, 4\}\}$.