.17 Data la fbf P descritta dalla seguente tavola di verità:

A	B	C	P
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

ovare P^D e P^C.

.18 Trovare un criterio affinché una formula in fnc sia una tautologia. Fare rettanto per una fnd.

.19 Provare che i due enunciati del Teorema di compattezza sono equiva-ti.

.20 Un grafo si dice *k-colorabile* ($k \in \mathcal{N}$) se esiste una partizione dei suoi rtici in k insiemi distinti $V_1, \ldots, V_k$ tali che due vertici adiacenti non appar-gono allo stesso insieme V_i. Provare che un grafo è k-colorabile se e solo se ni suo sottografo finito lo è (cfr. [KK67]).
ggerimento: considerare l'insieme di formule su $\{1, \ldots, k\} \times V$

$i,a) \rightarrow \neg(j,a)$ per tutti gli $i, j \leq k$, $i \neq j$ e per ogni $a \in V$
$1,a) \vee (2,a) \vee \ldots \vee (k,a)$
$i,a) \rightarrow \neg(i,b)$ per tutti gli $a,b \in V$ adiacenti

orre $v(i,a) = 1$ se e solo se $a \in V_i$).

21 Si definisca il connettivo $\odot$ duale del connettivo di implicazione $\rightarrow$, ndone la tabella di verità.

i esprima $\odot$ in funzione di $\{\neg, \wedge\}$.
i estenda la funzione $(\ )^\perp$ a formule composte anche dai connettivi $\odot$ e $\rightarrow$, si dimostri che per ogni P, $v(P^\perp) = 1 - v(P)$.

2

Sistemi deduttivi

Si consideri la seguente "proposizione":

$$(*) \quad \text{Se } A \rightarrow B \text{ e } A \rightarrow (B \rightarrow C) \text{ allora } A \rightarrow C$$

È possibile mostrare che è una tautologia costruendo la tabella di verità della formula corrispondente, cioè:

$$((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow (B \rightarrow C))) \rightarrow (A \rightarrow C)$$

Tuttavia, se si incontrasse la proposizione $(*)$ in un qualche testo matematico, ci si aspetterebbe piuttosto di trovare una *dimostrazione* del seguente tipo:

Dimostrazione. Supponiamo che

1 $A \rightarrow B$
2 $A \rightarrow (B \rightarrow C)$

Vogliamo dimostrare che $A \rightarrow C$. Questo significa provare che se vale A allora deve valere C. Supponiamo dunque che A sia vera. Da A e 1 possiamo concludere B. Da A e 2 possiamo concludere $B \rightarrow C$. Infine, da B e $B \rightarrow C$ concludiamo C. □

Il problema principale della logica formale è quello di definire dei sistemi di calcolo che permettano di sviluppare delle dimostrazioni del tipo precedente, cioè come una sequenza di passi elementari che, partendo dalle premesse, consenta di ottenere la conclusione.
Data inoltre una nozione semantica di *validità* (Definizione 1.9) delle formule logiche, ci si aspetta che il sistema formale sia *corretto*, nel senso che non permetta di inferire proposizioni non valide (o, eliminando la doppia negazione, permetta di inferire solo proposizioni valide). Correlato a questo problema è quello della *completezza* del sistema formale: sapendo che il sistema è corretto.

ci si chiede se ogni formula valida sia dimostrabile al suo interno. In questo capitolo affronteremo il problema della definizione sintattica dei calcoli logici, introducendo alcuni dei principali sistemi formali di logica simbolica: Deduzione Naturale, Sistemi Assiomatici e Calcolo dei Sequenti.
La correttezza e completezza di questi saranno discusse nel capitolo seguente.

2.1 Proprietà intuitive dei sistemi deduttivi

Cerchiamo di individuare le proprietà generali che ci si aspetta siano soddisfatte da un sistema di calcolo.
Useremo in questo paragrafo la notazione

$$A_1,A_2,\dots,A_n \vdash B$$

in modo informale, per indicare che nel sistema in oggetto siamo in grado di produrre una dimostrazione della conclusione B a partire da un insieme (eventualmente vuoto) di premesse $A_1,A_2,\dots,A_n$ (nel seguito useremo le lettere greche $\Gamma,\Delta,\dots$ per indicare insiemi finiti di fbf).
Per alcuni connettivi logici è piuttosto semplice definire le proprietà attese dal sistema formale.
Consideriamo, ad esempio, il caso della congiunzione. Avendo la premessa $A \wedge B$ ci si aspetta di poter concludere sia A che B. Viceversa, avendo entrambe le premesse A e B ci si aspetta di poter concludere $A \wedge B$.
Nella notazione precedente, il sistema formale deve dunque soddisfare le seguenti regole:

$$(\wedge e.1) \quad A \wedge B \vdash A$$
$$(\wedge e.2) \quad A \wedge B \vdash B$$
$$(\wedge i) \quad A,B \vdash A \wedge B$$

Si noti la differenza tra le regole $(\wedge e.1)$, $(\wedge e.2)$ da un lato e la regola $(\wedge i)$ dall'altro. Le prime due dicono *cosa si può concludere da* una formula il cui connettivo principale è $\wedge$. Per ovvie ragioni, tali regole sono dette di *eliminazione* del connettivo. La terza regola esprime le condizioni necessarie per *poter concludere* una formula il cui connettivo principale è $\wedge$. Questa viene detta regola di *introduzione* del connettivo. Le lettere e ed i nei nomi che abbiamo associato alle regole sono un riferimento mnemonico a questa suddivisione.
Veniamo al caso della disgiunzione. Le regole di introduzione sono abbastanza

concludere $A \vee B$. Vi sono quindi le regole seguenti:

$$(\vee i.1) \quad A \vdash A \vee B$$

$$(\vee i.2) \quad B \vdash A \vee B$$

Per quanto riguarda l'eliminazione di $\vee$, la situazione è assai meno chiar *cosa si può concludere da* una formula del tipo $A \vee B$? Assai poco, sembre dal momento che non è noto quale formula tra A e B sia vera. Suppon tuttavia, che *sia A che B* permettano di derivare una formula C, suppo cioè che $A \vdash C$ e $B \vdash C$. In tal caso non interessa sapere quale tra sia vera: avendo come premessa $A \vee B$ si sa che una di esse deve essere e siccome entrambe permettono di derivare C, allora ci si aspetta che derivabile da $A \vee B$.
Questo ragionamento può essere espresso dalla regola

$$(\vee e) \quad \textit{se} \ A \vdash C \ \textit{e} \ B \vdash C \ \textit{allora} \ A \vee B \vdash C$$

Si noti che questa ha una struttura più complicata delle precedenti. N guito, regole di tale tipo, che dipendono da alcune ipotesi di deducibilità terno del sistema, saranno dette regole *condizionali*. Le rimanenti, *eleme* Inoltre, se $A \vdash B$ è una ipotesi di una regola condizionale, diremo ch B sono rispettivamente premesse e conclusioni *sussidiarie* della regola s Ad esempio, in $(\vee e)$, A e B sono premesse sussidiarie, e C è una concl sussidiaria.
Consideriamo ora il connettivo di implicazione. Cosa si può concludere d premessa del tipo $A \to B$? Naturalmente, che se si ha A allora si può de B. Si ha dunque la seguente regola di eliminazione:

$$(\to e) \quad A,A \to B \vdash B$$

Questa è comunemente nota con il nome di *modus ponens*.
Viceversa, quando è possibile concludere $A \to B$? Anche in questo c risposta è naturale: quando si può derivare B da una premessa A, che alla seguente regola condizionale di introduzione:

$$(\to i) \quad \textit{se} \ A \vdash B \ \textit{allora} \ \vdash A \to B$$

Veniamo ora al connettivo di negazione, che è di gran lunga il più problen dal punto di vista logico. Intuitivamente, la negazione di una formula A nuova formula che esprime la falsità di A. Dal punto di vista di un si

all'interno di esso, cioè se $\vdash A$. Questo indurrebbe a ritenere che A sia falsa quando *non esiste* una dimostrazione di A, cioè $\nvdash A$; avremo quindi $\vdash \neg A$ se e solo se $\nvdash A$. Questa nozione di falsità, che chiameremo *non dimostrabilità*, è sicuramente accettabile da un punto di vista platonico, ma assai problematica dal punto di vista formale. Notiamo innanzitutto che essa sarebbe curiosamente "instabile": una proposizione vera (dimostrabile nel sistema) resta tale sotto ogni ipotesi aggiuntiva; ovviamente questo non è vero per le proposizioni non dimostrabili. Quindi, una formula *falsa* potrebbe diventare vera rispetto ad estensioni del sistema formale.
Un secondo problema è costituito dal fatto che, ragionevolmente, ci si attende che il sistema logico sia chiuso per istanziazioni, cioè che $\vdash A$ implichi $\vdash A'$ per ogni istanza A' di A. Se non vogliamo cadere in ovvie contraddizioni, dovremmo allora intendere $\nvdash A$ nel senso che *nessuna istanza* di A è dimostrabile, o anche che nessuna formula con "la struttura" di A è dimostrabile[1].
Tuttavia il problema principale legato alla nozione di falsità come *non dimostrabilità* è che nella teoria che abbiamo sviluppato fino ad ora non si ha a disposizione alcuno strumento (interno alla teoria) per parlare di "non dimostrabilità" (ovvero, non abbiamo considerato un sistema formale per $\nvdash$). Non solo: non è neppure evidente che una tale teoria debba necessariamente esistere, cioè che si possa catturare in modo effettivo il significato "platonico" della nozione di falsità (questo è ad esempio il caso, come vedremo, della logica del primo ordine).
A causa di tutte queste difficoltà, affronteremo il problema della formalizzazione delle regole logiche per il connettivo di negazione in modo differente.
Diciamo che una teoria formale è *inconsistente* quando permette di concludere qualunque formula. Una formula A si può allora considerare *assurda* se l'ipotesi di A rende inconsistente la teoria. Possiamo quindi ragionevolmente interpretare la nozione di falsità come assurdità.
Si introduce nel sistema formale una costante $\perp$ che denota inconsistenza (o falsità, nella nostra nuova accezione). Per definizione di $\perp$ si ammetterà nel sistema la regola di eliminazione:

$$(\perp e) \quad \perp \vdash A$$

La negazione è quindi introdotta dalla seguente regola condizionale:

$$(\neg i) \quad se\ \ A \vdash \perp \ \ allora\ \ \vdash \neg A$$

[1]Supponiamo che il sistema sia chiuso per istanziazioni. Se esso permettesse di provare $\vdash A$, con A variabile proposizionale, allora ogni formula sarebbe dimostrabile, ed il sistema sarebbe triviale. Supponiamo dunque $\nvdash A$. Allora, platonicamente, $\vdash \neg A$. Ma ancora siamo liberi di istanziare A, ottenendo ad esempio $\vdash \neg(A \to A)$, che è intuitivamente scorretto.

Ci si aspetta inoltre che la regola precedente sia "invertibile", nel senso avendo A, l'ipotesi aggiuntiva di $\neg A$ renda inconsistente il sistema. Questo la regola di eliminazione per la negazione:

$$(\neg e) \quad A, \neg A \vdash \perp$$

Esiste ancora una regola concernente la negazione che si potrebbe ragionevolmente aggiungere al sistema: se una formula B è dimostrabile assumendo e la stessa formula è dimostrabile assumendo $\neg A$, allora l'ipotesi di A o sembrerebbe superflua e potremmo concludere che B è comunque dimostrabile:

$$se\ \ \neg A \vdash B \ \ e\ \ A \vdash B \ \ allora\ \ \vdash B$$

Si osservi che grazie a $(\vee e)$ questa regola è equivalente all'assunzione $\vdash (A \vee \neg A)$ (*tertium non datur*). Ora, tale assunzione è del tutto ragionevole dal punto di vista della interpretazione semantica della nozione di "verità", ma assai meno se si interpreta "verità" nel senso di dimostrabilità: intuitivamente, nulla ci dice che una dimostrazione di A o di $\neg A$ debba necessariamente esistere.
Per approfondire il problema, consideriamo alcune formulazioni alternative della regola precedente.
Nel caso particolare in cui $B \equiv A$, questa si può riscrivere nel seguente modo (nota come regola di Peirce):

$$se\ \ \neg A \vdash A \ \ allora\ \ \vdash A$$

Ma se vale $(\neg e)$, da $\vdash A$ si può concludere $\neg A \vdash \perp$. Viceversa, se vale $(\perp e)$, $\neg A \vdash \perp$ implica $\neg A \vdash A$. Dunque, se il sistema formale soddisfa $(\neg e)$ e $(\perp e)$, l'ipotesi $\neg A \vdash A$ è equivalente a $\neg A \vdash \perp$, e la regola di Peirce può essere riscritta nel modo seguente:

$$(RAA) \quad se\ \ \neg A \vdash \perp \ \ allora\ \ \vdash A$$

Questa è la nota legge di *reductio ad absurdum*, che è il principio delle prove per contraddizione: per "dimostrare" A si fa vedere che la sua negazione conduce ad un assurdo. Questo passaggio è ragionevolmente sospetto: ciò che si può dire è che, per una ragione essenzialmente "semantica" (classicamente interna, questa, altamente intuitiva), e quindi trascendente dal sistema formale, deve essere "valida". Tuttavia si può ragionevolmente concludere di avere in questo modo una *dimostrazione* di A?
La questione non è trascurabile. I sistemi logici che si ottengono assumendo o rifiutando la regola (RAA) o quelle ad essa equivalenti sono profondamente

diversi. I primi sono detti sistemi classici, e saranno quelli che tratteremo in questo testo. I secondi sono noti come *sistemi intuizionisti*[2]. La differenza tra sistemi classici ed intuizionisti e la rilevanza matematica di questi ultimi si apprezza maggiormente a livello di calcolo dei predicati, dove ritorneremo brevemente sull'argomento. Per quel che concerne la logica proposizionale, la differenza più evidente è che nei sistemi intuizionisti, ogni volta che si ha una dimostrazione di $A \vee B$, questo significa che si ha o una dimostrazione di A o una di B, che appunto esprime la natura *costruttiva* del connettivo di disgiunzione. Ovviamente tale proprietà non vale nei sistemi classici: si pensi a $\vdash A \vee \neg A$: in generale, né A né $\neg A$ sono dimostrabili.
Esiste ancora una regola importante che deve essere soddisfatta dal sistema deduttivo. In particolare, ci si aspetta che le dimostrazioni siano *componibili*: se da un insieme di ipotesi Γ si deduce A, e da un insieme di ipotesi Γ, A si deduce B, la composizione di queste due dimostrazioni deve risultare in una dimostrazione di B dalle ipotesi Γ. Si noti che tale regola esprime una delle caratteristiche più naturali dei procedimenti dimostrativi: per provare un teorema complesso B, si può cominciare con il dimostrare dei lemmi più semplici (A, in questo caso), e poi provare B utilizzando questi.
La regola precedente è nota in letteratura come *regola di taglio*[3]; nella nostra notazione può essere espressa nel modo seguente:

$$(taglio) \quad se\ \Gamma \vdash A\ e\ \Gamma, A \vdash B\ allora\ \Gamma \vdash B$$

2.2 La Deduzione Naturale

Fino ad ora abbiamo semplicemente considerato un insieme di proprietà auspicabili per un sistema deduttivo che voglia modellare un procedimento di dimostrazione. Affrontiamo ora il problema di dare una definizione formale di tale sistema sotto forma di un calcolo logico.
Studieremo nel seguito varie formalizzazioni possibili. La prima che prendiamo in esame, introdotta da Gentzen [Gen34, Gen55], è nota con il nome di *Deduzione Naturale*[4].
Consideriamo innanzitutto le regole *elementari* del paragrafo precedente. L'idea di Gentzen è quella di dare una semplice rappresentazione di esse, scrivendo le premesse al di sopra di una linea orizzontale, e la conclusione al di sotto di questa. La linea orizzontale, che svolge il ruolo di $\vdash$, rappresenta dunque

[2] I sistemi intuizionisti sono spesso chiamati *sistemi costruttivi*.
[3] *Cut rule*, in inglese. Il nome originale, utilizzato dal logico tedesco Gentzen, è *Schnitt*.
[4] Un classico riferimento bibliografico per la Deduzione Naturale è il libro di Prawitz [Pra65]; per una semplice introduzione a questo sistema di calcolo si veda [VDa80].

un passo elementare di inferenza. In questa notazione, abbiamo le segu regole:

$$(\wedge e.1)\ \frac{A \wedge B}{A} \qquad (\wedge e.2)\ \frac{A \wedge B}{B} \qquad (\wedge i)\ \frac{A \quad B}{A \wedge B}$$

$$(\vee i.1)\ \frac{A}{A \vee B} \qquad (\vee i.2)\ \frac{B}{A \vee B} \qquad (\rightarrow e)\ \frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$$

$$(\bot e)\ \frac{\bot}{A} \qquad (\neg e)\ \frac{A \quad \neg A}{\bot}$$

L'idea è che, qualora la conclusione di una regola coincide con la premes un'altra, queste possono essere composte, dando luogo a una dimostra che ha la forma di albero. Si noti che tale tipo di composizione è giustifi dalla regola di taglio.
Se l'*insieme* delle foglie dell'albero è *contenuto* in Γ e la radice è C, l'al rappresenterà una dimostrazione di $\Gamma \vdash C$.

Esempio 2.1 L'albero

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B} \quad \dfrac{A \wedge B}{A}}{B \wedge A} \qquad B \wedge A \rightarrow C}{C}}{C \vee D}$$

rappresenta una dimostrazione di $A \wedge B, B \wedge A \rightarrow C \vdash C \vee D$.

Veniamo al caso delle regole condizionali, cioè regole che dipendono da al ipotesi del tipo $\Gamma \vdash C$. La soluzione di Gentzen consiste nello scrive premesse sussidiarie (Γ) tra parentesi al di sopra della conclusione sussid (C) che a sua volta diventa premessa della regola principale.
Avremo dunque le seguenti regole:

$$(\vee e)\ \frac{A \vee B \quad \begin{matrix}[A] \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B] \\ C\end{matrix}}{C} \qquad (\rightarrow i)\ \frac{\begin{matrix}[A] \\ B\end{matrix}}{A \rightarrow B}$$

$$(\neg i)\ \frac{\begin{matrix}[A] \\ \bot\end{matrix}}{\neg A} \qquad (RAA)\ \frac{\begin{matrix}[\neg A] \\ \bot\end{matrix}}{A}$$

L'idea è che, durante l'applicazione di una di queste regole, ogni ipotesi A che compare tra parentesi nella regola può essere *cancellata* nel sottoalbero la cui radice è la formula sottostante ad $[A]$ nella regola stessa (l'ipotesi cancellata sarà rappresentata tra parentesi quadre anche negli alberi di prova). Un albero di derivazione di radice C il cui insieme di foglie *non cancellate* è *contenuto* in Γ costituisce una prova di $\Gamma \vdash C$.
Consideriamo qualche esempio. Da A posso derivare $B \to A$ mediante una applicazione di $(\to i)$.

$$\dfrac{A}{B \to A}$$

La regola consentirebbe inoltre di cancellare eventuali premesse (foglie) di tipo B nel sottoalbero di radice A. Poiché in questo caso non ve ne sono (il sottoalbero è la foglia A stessa), non si opera nessuna cancellazione. Continuiamo la derivazione con un'altra applicazione di $(\to i)$ per ottenere $A \to (B \to A)$. In questo caso, è possibile cancellare la foglia A dal sottoalbero di radice $B \to A$.

$$\dfrac{\dfrac{[A]}{B \to A}}{A \to (B \to A)}$$

Si noti che l'albero non contiene foglie non cancellate: esso rappresenta una dimostrazione di $\vdash A \to (B \to A)$.
È bene che il lettore si soffermi a riflettere sul ruolo della cancellazione. Consideriamo, per fissare le idee, l'esempio precedente. Avendo A come ipotesi è stata fornita una dimostrazione di $B \to A$. Ovviamente, per poter concludere $A \to (B \to A)$, non si ha più bisogno dell'ipotesi A, poiché, per così dire, è stata incorporata all'interno dell'asserto (che è appunto la funzione delle formule condizionali o implicative). Si noti anche, tuttavia, che non sarebbe scorretto mantenere l'ipotesi A: la regola di cancellazione *permette*, ma non *obbliga*, di cancellare le formule che appaiono tra parentesi quadre nello schema di regola. Vediamo qualche altro esempio.

Esempio 2.2 Proviamo che $\vdash (A \to (B \to C)) \to (A \land B \to C)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \land B]}{B} \qquad \dfrac{\dfrac{[A \land B]}{A} \qquad [A \to (B \to C)]}{B \to C}}{C}}{A \land B \to C}}{(A \to (B \to C)) \to (A \land B \to C)}$$

Osserviamo che tutte le ipotesi sono cancellate. In particolare, le due o(renze dell'ipotesi $A \land B$ sono cancellate durante l'introduzione di $A \land B$ – e l'ipotesi $A \to (B \to C)$ è cancellata durante l'introduzione di $(A \to (1$ $C)) \to (A \land B \to C)$.

La Deduzione Naturale è un formalismo semplice ed elegante per la *rappre. tazione* di dimostrazioni, ma piuttosto difficile da usare nella *ricerca* di que Vediamo, a titolo di esempio, come si potrebbe cercare di *costruire* l'a ro di derivazione dell'esempio precedente. L'obiettivo è quello di dimost1 $(A \to (B \to C)) \to (A \land B \to C)$.
Poiché il connettivo principale di questa formula è una implicazione, ci si : aspettare che l'ultima regola applicata (dal basso) sia stata $(\to i)$ (si ı tuttavia che questa non è la sola possibilità: ad esempio la regola "corret potrebbe essere, a priori, una regola di riduzione ad assurdo). Seguendo ı strategia, dobbiamo ora cercare una dimostrazione di $A \land B \to C$ avend disposizione $A \to (B \to C)$ come ipotesi. Ancora, questo può ridursi a cerc di dimostrare C dalle ipotesi $A \to (B \to C)$ e $A \land B$. Ma ciò è semplice: av do $A \land B$ si possono derivare sia A che B, e dunque, mediante due applicazi della regola $(\to i)$, si ottiene C da $A \to (B \to C)$.

Esempio 2.3 Proviamo che $A \to \neg\neg A$. Infatti

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A] \qquad [\neg A]}{\bot}}{\neg\neg A}}{A \to \neg\neg A}$$

Le ipotesi $\neg A$ e A sono cancellate, rispettivamente con l'applicazione del regole $(\neg i)$ e $(\to i)$.

Esempio 2.4 Proviamo che $\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \lor B) \to C))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \lor B] \qquad \dfrac{[A] \quad [A \to C]}{C} \qquad \dfrac{[B] \quad [B \to C]}{C}}{C}}{A \lor B \to C}}{(B \to C) \to ((A \lor B) \to C)}}{(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \lor B) \to C))}$$

Le ipotesi A e B sono cancellate applicando $(\vee e)$, mentre $A \vee B, B \to C$ e $A \to C$ sono cancellate, rispettivamente, durante l'introduzione di $A \vee B \to C$, $(B \to C) \to ((A \vee B) \to C)$ e $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$.

Invitiamo il lettore a cercare le dimostrazioni in Deduzione Naturale di alcune semplici tautologie logiche: vedrà che in molti casi è assai meno facile di quanto si possa immaginare.

Si osservi che la notazione che è stata adottata per la rappresentazione delle dimostrazioni, ed in particolare per la cancellazione delle ipotesi, è *ambigua*. Consideriamo, ad esempio, la seguente dimostrazione di $\vdash A \to (A \to A)$

$$\cfrac{\cfrac{[A]}{A \to A}}{A \to (A \to A)}$$

Non è chiaro se l'ipotesi A sia stata cancellata durante la *prima* o la *seconda* applicazione di $(\to i)$. Questa ambiguità non è rilevante se si è semplicemente interessati al problema dell'esistenza di una dimostrazione. Il caso è differente se si è anche interessati alla dimostrazione in se stessa. Ad esempio, le due dimostrazioni precedenti di $\vdash A \to (A \to A)$ sono concettualmente molto diverse: la prima segue lo schema di dimostrazione di $\vdash B \to (A \to A)$, mentre la seconda quello di $\vdash A \to (B \to A)$.
Si noti che le dimostrazioni stesse hanno un ovvio interesse matematico. Se si pensa a un sistema informatico interattivo per il supporto alla dimostrazione o alla verifica automatica di teoremi, e dunque alla memorizzazione di ampie parti di teorie esistenti, risulta evidente che non basta un elenco più o meno strutturato di teoremi, ma si vuole poter rappresentare, unitamente ad essi, anche le loro dimostrazioni, come avviene in qualunque testo matematico. Ovviamente, dimostrazioni differenti dovrebbero avere rappresentazioni differenti.
Quella parte della logica che si occupa in modo preminente delle dimostrazioni, e dei problemi di rappresentazione, equivalenza, normalizzazione ecc. va appunto sotto il nome di *teoria della dimostrazione*.
Nel caso della Deduzione Naturale, l'ambiguità notazionale evidenziata in precedenza può essere risolta, ad esempio, numerando (o etichettando) in modo univoco tutte le ipotesi, e specificando per ogni applicazione di una regola quali di queste sono eventualmente cancellate. In modo equivalente, è possibile aggiungere dei puntatori da ogni regola che prevede cancellazione alle ipotesi cancellate durante l'applicazione della regola stessa.

2.3 Sistemi Assiomatici

L'idea alla base dei Sistemi Assiomatici[5] è quella di accettare come uni regola di inferenza il *modus ponens*

$$(\to e) \quad A, A \to B \vdash B$$

introducendo opportuni *assiomi* (particolari formule logiche di cui si assu la verità) in sostituzione delle altre regole.
Supponiamo per il momento di accettare non solo il modus ponens, ma an la regola di introduzione del connettivo di implicazione:

$$(\to i) \quad se\ A \vdash B\ allora\ \vdash A \to B$$

Si noti che la congiunzione di queste due regole implica che

$$A \vdash B\ \ se\ e\ solo\ se\ \ \vdash A \to B$$

Come conseguenza, ogni ipotesi $A \vdash B$ di una regola condizionale può ess rimpiazzata da $\vdash A \to B$. Ad esempio, la regola

$$(\vee e) \quad se\ A \vdash C\ e\ B \vdash C\ allora\ A \vee B \vdash C$$

può essere riscritta nella forma

$$se\ \vdash A \to C\ e\ \vdash B \to C\ allora\ A \vee B \vdash C$$

Ma a questo punto è possibile aggiungere direttamente le conclusioni s sidiarie come premesse della conclusione principale. Infatti, scrivere che $A \to C$ e $B \to C$ sono dimostrabili, allora anche $A \vee B \vdash C$ lo è, è del tu equivalente a scrivere che $A \vee B \vdash C$ è dimostrabile a condizione di avere an le ipotesi $A \to C$ e $B \to C$, ovvero

$$A \to C, B \to C, A \vee B \vdash C$$

Quindi tutte le regole possono essere espresse in forma elementare.
Inoltre, ogni regola elementare della forma

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$$

[5] In letteratura, tali sistemi sono anche noti come *Sistemi alla Hilbert*.