III

Logica degli enunciati: Calcolo dei connettivi

10. ENUNCIATI, CONNETTIVI, VALORI DI VERITÀ

10.1. Verità

> "I matematici sono stati sempre persuasi di dimostrare delle *verità* o delle *proposizioni vere*. Evidentemente tale convinzione non può essere che di ordine sentimentale o metafisico: non si può certo giustificarla ponendosi sul terreno della matematica".
>
> Nicolas Bourbaki

La frase di Bourbaki che abbiamo scelto per introdurre la prima sezione dedicata alla logica potrà stupire il lettore: la logica appare infatti strettamente collegata alla nozione di verità e la posizione espressa dal grande matematico policefalo può apparire eccessivamente prudente.

Ricordando le radici del pensiero matematico e logico, troviamo che:

> "Se andiamo a rileggere le dimostrazioni della geometria greca per considerarle non rispetto alla loro impostazione tecnica, ma per il ruolo che hanno nei confronti della tesi cui arrivano, ci troviamo sostanzialmente di fronte a tre situazioni principali che la dicono lunga sul ruolo assegnato alla dimostrazione: dimostrazioni di qualcosa che è vero, ma sconosciuto e non immediato (…); dimostrazioni di qualcosa che è evidente, ad esempio che gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali; dimostrazioni di qualcosa che è contro l'intuizione" (Ben-Ari, 1998, Introduzione di A.Labella p. x).

Dunque le dimostrazioni possono riguardare fatti più o meno evidenti o plausibili, ma riguardano comunque fatti *veri*. La logica di cui ci occupiamo è *bivalente*, cioè prevede che le espressioni assumano uno ed uno solo tra i due valori di verità: "vero", V, o "falso", F. Intuitivamente, con l'attribuzione di uno di questi due valori si indica che la verità (o la falsità) dell'espressione in questione può essere stabilita senza dubbio, che è evidente e oggettiva.

La logica contemporanea ha però evidenziato che il concetto di verità è delicato. Per introdurre la questione, proponiamo alcuni brani tratti da *Verità e dimostrazione* di Alfred Tarski (Tarski, 1969; riprenderemo alcune considerazioni da: Bagni, 1997) in cui si osserva che l'interpretazione di tale concetto ha radici antiche e può basarsi su considerazioni filosofiche come quelle espresse nel seguente passo, tratto dalla *Metafisica* di Aristotele:

> "Dire di ciò che è che non è, o di ciò che non è che è, è falso, mentre dire di ciò che è che è o di ciò che non è che non è, è vero" (Tarski, 1969).

Se considerassimo queste affermazioni alla stregua di una “definizione”, dovremmo osservare che la formulazione sarebbe insufficiente dal punto di vista formale: non è infatti abbastanza generale, in quanto è riferita soltanto a proposizioni che affermano qualche cosa (“che è” o “che non è”) di un soggetto, e sarebbe talvolta difficile far rientrare una proposizione qualsiasi in questo schema senza modificarne il senso.

(Bagni, 1997) si propone di ottenere una soddisfacente spiegazione del concetto classico di verità, superando l’originale formulazione aristotelica ma conservando di essa gli intenti principali. Per fare ciò è innanzitutto indispensabile riferirsi ad un linguaggio: considereremo la lingua italiana.

Seguiamo ancora Tarski ed esaminiamo la proposizione:

«La neve è bianca»

Che cosa intendiamo dire quando affermiamo che essa è vera o che è falsa? Accettando l’impostazione di Aristotele potremmo scrivere (Tarski, 1969):

«La neve è bianca» è vera se e solo se la neve è bianca
«La neve è bianca» è falsa se e solo se la neve non è bianca

Queste frasi illustrano il significato dei termini «vero» e «falso» quando tali termini sono riferiti alla proposizione «la neve è bianca» e possono dunque essere considerate definizioni (parziali) dei termini «vero» e «falso», cioè definizioni di questi termini in relazione a una particolare proposizione: «La neve è bianca». Generalizziamo allora quanto affermato per quella singola proposizione; otteniamo (sempre seguendo: Tarski, 1969):

(*) «*p*» è vera se e solo se *p*

Nella proposizione che verrà sostituita a *p*, però, non dovrà comparire la parola «vero», altrimenti la (*) verrebbe a costituire, ovviamente, un circolo vizioso e non sarebbe accettabile come definizione (parziale) di verità.

Quando avremo precisato un’equivalenza della forma (*) nella quale «*p*» sia sostituita da un’arbitraria proposizione italiana, potremo dire che l’uso del termine «vero» in riferimento alle proposizioni italiane è conforme al concetto classico di verità. Potremo allora affermare, nelle parole di Tarski, che “l’uso del termine «vero» è adeguato” (Tarski, 1969).

Ma è possibile realizzare tutto ciò? È cioè possibile fissare un uso adeguato del termine «vero» per le proposizioni scritte nel linguaggio scelto (nella lingua italiana)?

A questo punto è necessario precisare l’ambito nel quale vogliamo definire il concetto di verità: il procedimento sopra descritto non sarebbe ad esempio applicabile considerando l’intera lingua italiana. Innanzitutto l’insieme delle proposizioni italiane è (potenzialmente) infinito; inoltre la parola «vero» compare nella lingua italiana e ciò impedisce di applicare il procedimento.

Ma si presentano anche altri e ben più gravi problemi: se immaginassimo la possibilità di determinare un uso adeguato del termine «vero» con riferimento a proposizioni italiane del tutto arbitrarie, cadremmo inevitabilmente in una contraddizione: ci ritroveremmo infatti di fronte alla preoccupante possibilità di incontrare l’antinomia del mentitore (della quale ci siamo occupati a lungo nella sezione I). Seguiamo l’esposizione di Tarski:

> “Il linguaggio comune è universale, né deve essere altrimenti, giacché ci si aspetta che esso fornisca i mezzi adeguati a esprimere ogni cosa che possa essere espressa (…) Possiamo perfino costruire nel linguaggio ciò che talvolta viene detta una proposizione autologa, cioè una proposizione *S* che esprime il fatto che *S* stessa è vera o che è falsa. Se *S* esprime la propria falsità, si può dimostrare con un semplice ragionamento che *S* è contemporaneamente vera e falsa, e così ci ritroviamo di fronte l’antinomia” (Tarski, 1969).

Un grave problema è dunque determinato dalla potenza del linguaggio in cui scegliamo di operare; ma linguaggi universali non sono, in generale, assolutamente necessari per gli scopi della ricerca scientifica. È allora possibile dare una definizione del concetto di verità per linguaggi semanticamente limitati?

Tarski risponde affermativamente, ma precisa alcune condizioni: è necessario che il vocabolario del linguaggio in questione sia completamente determinato e che siano formulate esplicitamente delle precise regole sintattiche sulle quali basare la formazione delle proposizioni. Tali regole devono essere formali, dunque riferite esclusivamente alla forma esteriore delle espressioni. I linguaggi che soddisfano a queste condizioni sono detti *formalizzati*.

Si noti inoltre che il linguaggio che è l’oggetto dello studio (per il quale dunque si vuole costruire la definizione di verità) non coincide con il linguaggio nel quale la definizione viene formulata; quest’ultimo si dice *metalinguaggio*, mentre il primo è denominato *linguaggio oggetto*. Il metalinguaggio deve contenere come parte propria il linguaggio oggetto; deve inoltre contenere nomi per le espressioni del linguaggio oggetto e altri termini necessari allo studio del linguaggio oggetto. Sottolineiamo che nel procedimento di definizione del concetto di verità i termini semantici (ovvero quelli che collegano le proposizioni del linguaggio oggetto e gli oggetti a cui esse sono riferite) devono poter essere introdotti nel metalinguaggio mediante opportune definizioni. Tutto ciò conferma che il metalinguaggio deve essere più ricco del corrispondente linguaggio oggetto.

Considerate queste precisazioni è possibile concludere:

> “Se tutte le precedenti condizioni sono soddisfatte, la costruzione della desiderata definizione di verità non presenta difficoltà essenziali. Tecnicamente, tuttavia, essa è troppo complicata per essere esposta qui in dettaglio. Per ogni data proposizione del linguaggio oggetto si può facilmente formulare la corrispondente definizione parziale della forma (*)” (Tarski, 1969).

Si presenta infine un’ulteriore difficoltà: l’insieme costituito da tutte le proposizioni del linguaggio oggetto è infinito, mentre ogni proposizione del metalinguaggio è una sequenza finita di segni; pertanto non si può pensare di dare la desiderata definizione generale mediante un puro e semplice accostamento di tutte le (infinite) definizioni parziali. Eppure, conclude Tarski nel lavoro citato, la nostra definizione generale non è poi molto diversa, almeno intuitivamente, da quell’accostamento:

> “Molto approssimativamente, si procede come segue. Dapprima si considerano le proposizioni più semplici, che non contengono altre proposizioni come parti; per queste proposizioni si trova il modo di definire la verità direttamente (usando la stessa idea che conduce alle definizioni parziali). Poi, mediante l’uso delle regole sintattiche che riguardano la formazione di proposizioni più complicate a partire da quelle più semplici,

si estende la definizione a proposizioni composte arbitrarie; si applica qui il metodo conosciuto in matematica come definizione per ricorsione".

10.2. Enunciati

Il paragrafo precedente mostra che il concetto di verità (o di falsità) di un'affermazione è certamente delicato e complesso. Un'impostazione rigorosa della logica matematica potrebbe allora concentrarsi innanzitutto sulle espressioni che possono essere scritte utilizzando (sintatticamente) un assegnato alfabeto e solo successivamente occuparsi della semantica di tali espressioni, ovvero dell'attribuzione di un significato e dei conseguenti valori di verità ad esse. Dunque anche l'introduzione del concetto di enunciato, che come vedremo è strettamente collegata all'attribuzione dei valori di verità ad un'espressione, potrebbe essere rimandata (torneremo infatti al concetto di enunciato nel paragrafo seguente, seguendo un percorso analogo a quello ora delineato, seppure in un ambito più ampio).

Tuttavia, didatticamente, è utile anticipare sin d'ora che diremo *enunciato* o *proposizione* un'affermazione che assume uno ed un solo valore di verità, vero oppure falso. E tale caratteristica è tutt'altro che banale: infatti non tutte le affermazioni assumono incontestabilmente uno ed un solo valore di verità.

(Contro)esempio. L'affermazione:

Esiste almeno un numero reale tale che il suo quadrato sia il reale z

non è un enunciato: esso dipende dal particolare z che sarà considerato; la scelta di un valore z negativo o non negativo comporta un valore di verità rispettivamente falso o vero per l'affermazione data.

E l'affermazione:

Tutti i naturali pari maggiori di 2 sono somme di due numeri primi

può essere considerato un vero e proprio enunciato? Si tratta infatti della celebre *congettura di Goldbach*, un problema che abbiamo presentato nella sezione precedente; com'è noto, nessun matematico, sino ad oggi (2002), è stato in grado di dimostrare (oppure smentire) tale famosa affermazione. In altri termini, non sappiamo se la frase sopra riportata sia vera o sia falsa; a rigore, non potremmo neppure essere sicuri che sia possibile stabilire la sua verità o la sua falsità!

Alcuni enunciati sono costituiti da una sola affermazione (come «La neve è bianca» citato da Tarski) e sono detti *enunciati atomici*. Sottolineiamo sin d'ora che in questo primo capitolo dedicato alla logica degli enunciati prescinderemo dalla "struttura interna" degli enunciati in questione: in effetti sarebbe importante esaminare il tipo di affermazione di volta in volta considerata, che spesso viene riferita ad un soggetto *variabile* (cioè essa può essere riferita ad un singolo soggetto ma anche ad un insieme di soggetti). Questa nostra scelta è esclusivamente didattica e provvisoria: verrà superata quando passeremo alla considerazione della logica dei predicati.

Pur senza esaminare, in questa fase, la struttura degli enunciati, gli enunciati atomici non saranno gli unici che prenderemo in considerazione. Enunciati più complessi sono costituiti da più affermazioni, collegate da opportune parole (*connettivi*) come *o*, *e*, *se… allora…*, *se e solo se*. I connettivi collegano gli enunciati senza riguardo al significato che possono assumere quelli: l'unica caratteristica che viene indicata nella loro definizione è quale valore di verità abbia l'enunciato composto a partire soltanto dai valori di verità assegnati agli enunciati componenti.

(Contro)esempio. Intuitivamente:

A = "il numero otto è rappresentato ad una sola cifra"
B = "un triangolo ha tre lati"

sono enunciati veri; però il buon senso ci porterebbe a dire che

"è inevitabile che A"

è falso (possiamo infatti rappresentare otto in base 2, ottenendo 100); invece

"è inevitabile che B"

è vero. Da ciò potremmo concludere che l'operatore "è inevitabile che" non agisce sugli enunciati come fanno i veri e propri "connettivi" logici, dunque tenendo conto esclusivamente dei valori di verità.

Come vedremo nel paragrafo seguente, la definizione dei connettivi, che sono, in fondo, operazioni tra enunciati, avviene mediante le *tavole di verità*.

10.3. Connettivi e valori di verità

I connettivi formalizzano alcune parole e sono indicati da opportuni simboli:

$\neg A$	che formalizza	non A
$A \wedge B$	che formalizza	A e B
$A \vee B$	che formalizza	A o B
$A \to B$	che formalizza	se A allora B
$A \leftrightarrow B$	che formalizza	se A allora B e se B allora A

(talvolta "non" viene indicato come "operatore" e non come "connettivo" in quanto, a differenza degli altri connettivi, non collega due enunciati ma opera su di un solo enunciato).

(Contro)esempio. E' utile osservare che l'indicazione dei connettivi mediante congiunzioni come "non", "e", "o" richiede una qualche prudenza. Ad esempio, la scrittura $A \vee B$, che come sopra detto formalizza "A o B", deve essere intesa in senso inclusivo ("o A o B o entrambi"), non in senso esclusivo ("o A o B ma *non* entrambi").

Un'effettiva definizione dei connettivi richiede la precisazione delle tavole di verità, di cui ci occuperemo nel seguito del paragrafo.

Grazie ai connettivi è possibile introdurre induttivamente l'insieme degli enunciati: utilizzeremo un alfabeto costituito da lettere maiuscole (con le quali rappresenteremo gli enunciati atomici), dai connettivi sopra introdotti e da un insieme finito di segni come virgole o parentesi.

Possiamo allora procedere per induzione ed affermare che:

- A, B, C, … sono enunciati
- se X, Y sono enunciati, allora $\neg$X, X$\wedge$Y, X$\vee$Y, X$\rightarrow$Y, X$\leftrightarrow$Y sono enunciati

Nella tabella (tavola di verità) sono riassunte le definizioni dei connettivi:

A	B	$\neg$A	A$\wedge$B	A$\vee$B	A$\rightarrow$B	A$\leftrightarrow$B
V	V	F	V	V	V	V
V	F	(F)	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	(V)	F	F	V	V

Costruiamo ora le tavole di verità di alcuni enunciati composti (il metodo della costruzione della tavola di verità è stato introdotto da Ludwig Wittgentein).

Esempio. La tavola di verità dell'enunciato composto $\neg$[(A$\wedge$B)$\vee$(A$\wedge\neg$B)] è:

A	B	A$\wedge$B	$\neg$B	A$\wedge\neg$B	(A$\wedge$B)$\vee$(A$\wedge\neg$B)	$\neg$[(A$\wedge$B)$\vee$(A$\wedge\neg$B)]
V	V	V	F	F	V	F
V	F	F	V	V	V	F
F	V	F	F	F	F	V
F	F	F	V	F	F	V

Osserviamo che i valori di verità di $\neg$[(A$\wedge$B)$\vee$(A$\wedge\neg$B)] corrispondono a quelli di $\neg$A.

Esempio. La tavola di verità dell'enunciato composto (A$\rightarrow$B)$\leftrightarrow$($\neg$B$\rightarrow\neg$A) è:

A	B	A$\rightarrow$B	$\neg$B	$\neg$A	$\neg$B$\rightarrow\neg$A	(A$\rightarrow$B)$\leftrightarrow$($\neg$B$\rightarrow\neg$A)
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Osserviamo che il valore di verità è V per ogni scelta dei valori di verità di A e di B.

Prima di procedere, osserviamo che l'introduzione di cinque connettivi è sovrabbondante: ad esempio, sarebbe stato molto più sintetico introdurre solamente "$\neg$" (non) e "$\rightarrow$" (se… allora). Avremmo allora ricondotto gli altri connettivi a combinazioni di questi; si verifica infatti che:

A$\wedge$B ha la stessa tavola di verità di $\neg$[A$\rightarrow$($\neg$B)]

$A \vee B$	ha la stessa tavola di verità di	$(\neg A) \to B$
$A \leftrightarrow B$	ha la stessa tavola di verità di	$\neg\{(A \to B) \to [\neg(B \to A)]\}$

Lasciamo al lettore la costruzione delle tavole di verità degli enunciati composti presenti nella colonna a destra.

Esempio. Non è difficile verificare (ed il lettore lo farà facilmente) che gli enunciati composti $\neg(A \vee B)$ e $(\neg A) \wedge (\neg B)$ hanno gli stessi valori di verità. Questa osservazione (legge di De Morgan) ha delle conseguenze interessanti: in particolare, riflettendo su di essa possiamo renderci conto che il corretto uso della simbologia comunemente usata in matematica presuppone un'effettiva conoscenza delle relazioni tra i connettivi logici.

Consideriamo ad esempio l'equazione:

$$x^2 = 1$$

Le sue soluzioni si trovano spesso espresse compattamente nella forma

$$x = \pm 1$$

intendendo con ciò che la x può assumere sia il valore $+1$ che il valore -1. Dunque, utilizzando i connettivi logici, la precedente scrittura può essere espressa, più correttamente, da

$$x = 1 \ \vee \ x = -1$$

Consideriamo ora la scrittura:

$$x^2 \neq 1 \qquad \text{che porta alla} \qquad x \neq \pm 1$$

In questo caso, al simbolo "±" non è direttamente legato un connettivo "∨"; ovvero, la precedente scrittura non deve essere tradotta in

$$x \neq 1 \ \vee \ x \neq -1$$

in quanto questa richiederebbe il verificarsi di *almeno una* delle condizioni $x \neq 1$ e $x \neq -1$ (quindi alla x potrebbe essere sostituito… un qualsiasi numero reale!), mentre $x \neq \pm 1$ richiede il *contemporaneo* verificarsi di entrambe tali condizioni.

Ricordiamo piuttosto che $x^2 \neq 1$ deve essere interpretata come la negazione di $x^2 = 1$; dunque essa corrisponde a

$$\neg(x^2 = 1) \quad \text{cioè} \quad \neg(x = 1 \ \vee \ x = -1) \quad \text{e infine} \quad \neg(x = 1) \ \wedge \ \neg(x = -1)$$

Alla luce di quanto osservato, possiamo dire che i connettivi binari sono 16 in tutto, ma sono interdefinibili. In realtà, dal momento che di un connettivo interessa soltanto la tavola di verità, questa si può ottenere da una combinazione di altri connettivi. Ad esempio, l'insieme $\{\neg, \wedge, \vee\}$ è sufficiente a definirli tutti, ma anche $\{\neg, \to\}$ lo è o, addirittura $\{\uparrow\}$, che corrisponde a *né…né* (esercizio). Tali insiemi si dicono *basi* di connettivi.

10.4. Interpretazioni, equivalenza logica, validità

Diremo *interpretazione* di un enunciato composto una funzione che assegna uno dei due valori di verità V o F a ciascun enunciato atomico componente e che quindi assegna un valore di verità all'enunciato composto sulla base delle tavole di verità.

Definizione. Due enunciati si dicono *logicamente equivalenti* se hanno lo stesso valore di verità per ogni interpretazione.

Esempio. Le seguenti sono equivalenze logiche:

A equivale a $\neg\neg A$
A equivale a $A \wedge A$
A equivale a $A \vee A$

$A \wedge B$ equivale a $B \wedge A$
$A \vee B$ equivale a $B \vee A$
$A \leftrightarrow B$ equivale a $B \leftrightarrow A$
$A \rightarrow B$ equivale a $(\neg B) \rightarrow (\neg A)$

$A \wedge (B \wedge C)$ equivale a $(A \wedge B) \wedge C$
$A \vee (B \vee C)$ equivale a $(A \vee B) \vee C$
$A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$ equivale a $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$

$A \wedge (B \vee C)$ equivale a $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
$A \vee (B \wedge C)$ equivale a $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
$A \wedge (A \vee B)$ equivale a A
$A \vee (A \wedge B)$ equivale a A

$A \leftrightarrow B$ equivale a $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
$A \rightarrow B$ equivale a $(\neg A) \vee B$
$A \rightarrow B$ equivale a $\neg[A \wedge (\neg B)]$
$A \wedge B$ equivale a $\neg[(\neg A) \vee (\neg B)]$ (legge di De Morgan)
$A \vee B$ equivale a $\neg[(\neg A) \wedge (\neg B)]$ (legge di De Morgan)
$A \wedge B$ equivale a $\neg[A \rightarrow (\neg B)]$
$A \vee B$ equivale a $(\neg A) \rightarrow B$

$A \rightarrow B$ equivale a $A \leftrightarrow (A \wedge B)$
$A \rightarrow B$ equivale a $B \leftrightarrow (A \vee B)$
$A \wedge B$ equivale a $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \vee B)$
$A \leftrightarrow B$ equivale a $(A \vee B) \rightarrow (A \wedge B)$

Notiamo che le equivalenze stabilite nella precedente tabella sono, come era da aspettarsi, tutte equazioni vere in un'algebra di Boole. Infatti se costruiamo il quoziente dell'insieme degli enunciati rispetto alla relazione di equivalenza logica e su di esso riportiamo i connettivi come operazioni tra classi, otteniamo una vera e propria algebra di Boole, dove la classe [A] precede la classe [B] se $A \rightarrow B$ è sempre vero (esercizio).

Definizione. Un enunciato si dice *soddisfacibile* se assume il valore di verità V per almeno un'interpretazione; in tale caso, questa interpretazione si dice *modello* per l'enunciato considerato.

Definizione. Un enunciato P che assume il valore di verità V per ogni interpretazione si dice enunciato *valido* o *tautologia*.

L'enunciato $(A\to B)\leftrightarrow(\neg B\to\neg A)$, di cui abbiamo costruito la tavola di verità in un precedente esempio, è una tautologia.

Se P è un enunciato valido (tautologia), si scrive: $\models P$.

Definizione. Un enunciato si dice *insoddisfacibile* se non assume il valore di verità V per alcuna interpretazione, cioè se in ogni interpretazione assume il valore di verità F. Un enunciato è *falsificabile* se assume il favore di verità F in almeno un'interpretazione.

Dalle definizioni introdotte segue che un enunciato P è valido (è una tautologia) se e solo se ¬P è insoddisfacibile e che P è soddisfacibile se e solo se ¬P è falsificabile.

10.5. Principii logici e ragionamento per assurdo

Naturalmente le tautologie della logica degli enunciati sono verità nel linguaggio oggetto, ma spesso vengono assunte come principii nel metalinguaggio, almeno quando quest'ultimo è pensato in maniera rigorosa e non colloquiale.

Ad esempio il fatto che $A\vee\neg A$ sia una tautologia, porta, a livello del metalinguaggio, al principio del *terzo escluso* (*un'affermazione o la sua negazione deve essere per forza vera*), mentre il fatto che $A\wedge\neg A$ sia una contraddizione, porta, a livello del metalinguaggio, alla formulazione del principio di *non contraddizione* (*un'affermazione e la sua negazione non possono essere contemporaneamente vere*).

Utilizzeremo spesso un altro principio nelle dimostrazioni: dalla tautologia $(A\to B)\leftrightarrow(\neg B\to\neg A)$, possiamo ricavare che "*ricavare B da A equivale a dire che, negare B, porta necessariamente a negare A*". Potremmo chiamare questo principio di *contrapposizione*, ma possiamo anche derivarne una forma più nota e più usata, che è la *riduzione all'assurdo.* Se, infatti, B fosse una contraddizione (assurdo), ¬B sarebbe una tautologia e, perciò, ¬A sarebbe inferita da una tautologia, risultando essa stessa una tautologia (esercizio). Perciò *provare che A è contraddittoria (¬A valida) può ridursi a provare che, supponendo A, si arriva ad un assurdo B.*

11. IL METODO DEI TABLEAU PROPOSIZIONALI

11.1. La confutazione di un enunciato composto

Il metodo dei tableau proposizionali è originariamente un procedimento per *provare* la soddisfacibilità di un enunciato. Esso, infatti, decompone l'enunciato fino alle sue componenti elementari alle quali verrà richiesto di essere vere o false per soddisfare (se possibile) l’enunciato. In questo modo il metodo fornisce anche le eventuali interpretazioni.

Il metodo viene però spesso usato per *confutare* un enunciato. Confutare un enunciato, cioè provare che esso è insoddisfacibile, significa dimostrare che esso è falso qualsiasi siano i valori di verità degli enunciati componenti. Ad esempio, confutare $A\wedge(\neg A)$ è immediato, in quanto tale enunciato risulta sempre falso, sia che l’(unico) componente A sia vero, sia che A sia falso. Con il metodo dei tableau, si potrà confutare un enunciato cercando di trovare una contraddizione nella prova della sua soddisfacibilità, utilizzando cioè la tecnica di riduzione all’assurdo.

Ovviamente a questo punto il metodo dei tableau potrà essere utilizzato anche per provare che un enunciato composto è una tautologia: basterà confutare la negazione dell’enunciato in esame. Confutare $\neg A$ (provare che $\neg A$ è sempre falso) equivale a dimostrare che A è una tautologia (che A è sempre vero).

Il metodo può risultare più agile, dal punto di vista esecutivo, del metodo delle tavole di verità. Osserviamo invece che non possiamo servircene per esaminare i singoli valori di verità assunti da enunciati composti (suscettibili di assumere entrambi i valori di verità), al variare dei valori di verità assunti dagli enunciati componenti: per condurre un simile esame, non possiamo che affidarci al metodo (spesso più complicato) delle tavole di verità.

I tableau proposizionali sono grafi ad albero costituiti da una disposizione piana di nodi, contenenti uno o più enunciati; il primo contiene sempre l’enunciato in esame. A partire da questo viene costruita una tabella ramificata, costituita da enunciati sempre meno complicati, spesso fino a giungere ai singoli enunciati componenti: la costruzione ha termine quando tutti gli ultimi nodi dei rami contengono solamente enunciati atomici o loro negazioni. Ad un ramo possono essere aggiunti nodi in base ad alcune regole, che presenteremo intuitivamente.

Procederemo nel modo seguente: sappiamo che la coppia di enunciati (A e $\neg A$) non è simultaneamente soddisfacibile, perché uno dei due sarà vero se e soltanto se l’altro sarà falso; la presenza nello stesso nodo di un enunciato e della sua negazione formalizza dunque un’inevitabile situazione di contraddittorietà. Ciò rende inutile procedere nell’analisi e il ramo al quale il nodo appartiene viene detto *chiuso*.

Consideriamo ora in generale i connettivi $\wedge$ e $\vee$: in quale caso possiamo dire che $X\wedge Y$ è vero? Occorre che ambedue gli enunciati X e Y siano veri. In quale caso, invece, possiamo dire che $X\vee Y$ è vero? Se e solo se almeno uno tra X ed Y è vero. Dunque se nel caso di $X\wedge Y$, dobbiamo collocare gli enunciati componenti X e Y nello stesso nodo, per richiedere la verità contemporanea di entrambi; nel caso di $X\vee Y$, dobbiamo creare una biforcazione del grafo, su uno dei due nodi generati porre X e sull’altro Y, perché si vengono a creare due situazioni, ugualmente accettabili per i nostri scopi, una che richiede la verità di X, l’altra di Y. Anticipiamo che le regole che si riferiranno al connettivo $\wedge$ determineranno l’aggiunta di un (singolo) nodo al tableau e saranno dette *α-regole*; le regole che si riferiranno a $\vee$ determineranno la biforcazione del tableau (e dunque l’aggiunta di due nodi) e saranno dette *β-regole*.

Tali regole dovranno essere operativamente interpretate nel modo seguente: se tra gli enunciati di un nodo c’è quello presente nella prima riga della regola, allora al ramo in questione si può aggiungere un nodo (o una coppia di nodi, nel caso delle biforcazioni previste) in cui l’enunciato sia sostituito come indicato nell’ultima riga della regola.

Ricapitolando: la presenza di un enunciato nel ramo in esame (l'enunciato scritto nella prima riga) ci consente di aggiungere al ramo stesso:

- o *un unico nodo*, con uno o con due enunciati, la falsità di uno dei quali comporta la falsità dell'enunciato di partenza (regole di tipo α);
- o *due nodi* (quindi con una biforcazione), la falsità di entrambi i quali comporta la falsità dell'enunciato di partenza (regole di tipo β).

Pertanto, se all'ultimo nodo di un ramo appartengono contemporaneamente un enunciato A e la sua negazione $\neg$A, significa che sia la falsità di A che la verità di A (quindi, la falsità di $\neg$A) comportano la falsità dell'enunciato del primo nodo, cioè dell'enunciato da soddisfare. Si dice allora che il ramo è *chiuso*; quando *tutti* i rami sono chiusi, il tableau è chiuso e la confutazione è completata.

11.2. La costruzione di un tableau proposizionale

Ricaviamo dunque le regole per la costruzione di un tableau proposizionale (la numerazione delle regole è quella proposta in: Bell & Machover, 1977), iniziando con l'evidenziare la corrispondenza dei connettivi che fanno riferimento al connettivo $\wedge$ (ciò porterà a delle α-regole) o al connettivo $\vee$ (ciò porterà a delle β-regole):

Prima regola	(α)	riguarda: $\neg(\neg X)$	cioè: X
Seconda regola	(β)	riguarda: $(X \to Y)$	cioè: $(\neg X) \vee Y$
Terza regola	(α)	riguarda: $\neg(X \to Y)$	cioè: $X \wedge (\neg Y)$
Quarta regola	(α)	riguarda: $X \wedge Y$	
Quinta regola	(β)	riguarda: $\neg(X \wedge Y)$	cioè: $(\neg X) \vee (\neg Y)$
Sesta regola	(β)	riguarda: $X \vee Y$	
Settima regola	(α)	riguarda: $\neg(X \vee Y)$	cioè: $(\neg X) \wedge (\neg Y)$
Ottava regola	(β)	riguarda: $X \leftrightarrow Y$	cioè: $(X \wedge Y) \vee [(\neg X) \wedge (\neg Y)]$
Nona regola	(β)	riguarda: $\neg(X \leftrightarrow Y)$	cioè: $[X \wedge (\neg Y)] \vee [(\neg X) \wedge Y]$

Prima regola (α)

$$\begin{array}{c} \neg(\neg X) \\ \downarrow \\ X \end{array}$$

Seconda regola (β)

$$\begin{array}{c} X \to Y \\ \swarrow \quad \searrow \\ \neg X \qquad Y \end{array}$$

Terza regola (α)

$$\begin{array}{c} \neg(X \to Y) \\ \downarrow \\ X \\ \neg Y \end{array}$$

Quarta regola (α)

$$\begin{array}{c} X \wedge Y \\ \downarrow \\ X \\ Y \end{array}$$

Quinta regola (β)

$$\begin{array}{c} \neg(X \wedge Y) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \neg X \qquad \neg Y \end{array}$$

Sesta regola (β)

$$\begin{array}{c} X \vee Y \\ \swarrow \quad \searrow \\ X \qquad Y \end{array}$$

Settima regola (α)

$$\begin{array}{c} \neg(X\vee Y) \\ \downarrow \\ \neg X \\ \neg Y \end{array}$$

Ottava regola (β)

$$\begin{array}{ccc} & X\leftrightarrow Y & \\ \swarrow & & \searrow \\ X & & \neg X \\ Y & & \neg Y \end{array}$$

Nona regola (β)

$$\begin{array}{ccc} & \neg(X\leftrightarrow Y) & \\ \swarrow & & \searrow \\ X & & \neg X \\ \neg Y & & Y \end{array}$$

È opportuno contrassegnare (ad esempio con: "♦") gli ultimi nodi dei rami chiusi.

Esempio. Confutiamo:

$$\neg\{[(A\to B)\wedge(B\to C)]\to(A\to C)\}$$

Applichiamo innanzitutto la terza regola; otteniamo:

$$\begin{array}{c} \neg\{[(A\to B)\wedge(B\to C)]\to(A\to C)\} \\ | \\ (A\to B)\wedge(B\to C) \\ \neg(A\to C) \end{array}$$

Applichiamo la quarta regola al primo dei due enunciati ottenuti:

$$\begin{array}{c} \neg\{[(A\to B)\wedge(B\to C)]\to(A\to C)\} \\ | \\ (A\to B)\wedge(B\to C) \\ \neg(A\to C) \\ | \\ A\to B \\ B\to C \\ \neg(A\to C) \end{array}$$

e quindi la terza regola all'enunciato $\neg(A\to C)$:

$$\begin{array}{c} \neg\{[(A\to B)\wedge(B\to C)]\to(A\to C)\} \\ | \\ (A\to B)\wedge(B\to C) \\ \neg(A\to C) \\ | \\ A\to B \\ B\to C \\ \neg(A\to C) \\ | \\ A\to B \\ B\to C \\ A \\ \neg C \end{array}$$

Applichiamo la seconda regola al primo enunciato dell'ultimo nodo (introducendo così una biforcazione nel tableau):

¬{[(A→B)∧(B→C)]→(A→C)}
|
(A→B)∧(B→C)
¬(A→C)
|
A→B
B→C
¬(A→C)
|
A→B
B→C
A
¬C
/ \
B→C   B→C
A   A
¬C   ¬C
¬A   B
♦

Il ramo che termina con ¬A (quello a sinistra) è chiuso, in quanto nell'ultimo nodo troviamo sia A che ¬A; possiamo abbandonarne l'esame e proseguire la formazione del tableau con il solo ramo a destra. Applichiamo la seconda regola a B→C (e ciò provoca un'ulteriore biforcazione):

¬{[(A→B)∧(B→C)]→(A→C)}
|
(A→B)∧(B→C)
¬(A→C)
|
A→B
B→C
¬(A→C)
|
A→B
B→C
A
¬C
/ \
B→C   B→C
A   A
¬C   ¬C
¬A   B
♦   / \
A   A
¬C   ¬C
B   B
¬B   C

$\blacklozenge \qquad \blacklozenge$

I due rami formati sono entrambi chiusi: quello a sinistra per la presenza contemporanea di B e ¬B nell'ultimo nodo; quello a destra per la presenza contemporanea di C e ¬C nell'ultimo nodo. *Tutti i rami del tableau risultano dunque chiusi: l'enunciato di partenza è confutato e ciò significa che la sua negazione*:

$$[(A \to B) \wedge (B \to C)] \to (A \to C)$$

è una tautologia (talvolta detta *legge del sillogismo ipotetico*).

Esempio. Esaminiamo la formula:

$$P \wedge [(\neg Q) \vee (\neg P)]$$

Proviamo a costruire il tableau della formula data (non negata):

$$\begin{array}{ccc}
 & P \wedge [(\neg Q) \vee (\neg P)] & \\
 & | & \\
 & P & \\
 & (\neg Q) \vee (\neg P) & \\
 / & & \backslash \\
P & & P \\
\neg Q & & \neg P \\
 & & \blacklozenge
\end{array}$$

Non abbiamo ottenuto un tableau chiuso: il ramo a destra è infatti chiuso, ma quello a sinistra no. Ciò significa che la formula data è soddisfacibile; inoltre, dal ramo aperto ci viene anche fornita l'interpretazione che la rende soddisfatta:

$$v(P) = V \text{ e } v(Q) = F$$

Esempio. Proviamo allora a costruire il tableau della negazione della formula esaminata nell'esempio precedente:

$$\neg\{P \wedge [(\neg Q) \vee (\neg P)]\} \quad \text{o} \quad (\neg P) \vee \{\neg[(\neg Q) \vee (\neg P)]\}$$

che può essere dunque scritta: $(\neg P) \vee (Q \wedge P)$.

È impossibile ottenere un tableau chiuso: dalla $(\neg P) \vee (Q \wedge P)$ ricaviamo

$$\begin{array}{ccc}
 & (\neg P) \vee (Q \wedge P) & \\
 / & & \backslash \\
\neg P & & Q \wedge P
\end{array}$$

ed anche l'aggiunta di Q e P (considerando la formula $Q \wedge P$ nel nodo di destra) non ci consentirà di chiudere il tableau.

11.3. Correttezza e completezza

Abbiamo più volte affermato che il metodo dei tableau proposizionali consente di stabilire se una formula è valida ma, per il momento, si è trattato soltanto di una giustificazione intuitiva. Ci accingiamo ora a provare formalmente che questo è il caso.

Si può provare innanzitutto che la costruzione di un tableau proposizionale di un enunciato, condotta secondo il procedimento precedentemente descritto, termina dopo un numero *finito* di passi e che su ogni foglia abbiamo soltanto enunciati atomici o loro negazioni (detti anche *letterali*). Ciò è facilmente dimostrabile per induzione strutturale, perché supponendo di non utilizzare il connettivo $\leftrightarrow$ (d'altronde facilmente simulabile con una combinazione di altri), l'applicazione delle regole porta ad ogni passo ad una sostanziale diminuzione dei connettivi presenti nel nodo e questi sono in numero finito.

Si prova poi che, detto T un tableau completo per P, P è insoddisfacibile se e soltanto se il tableau T è chiuso. L'implicazione *se T è chiuso allora P è insoddisfacibile* corrisponde alla *correttezza* del metodo, perché significa che ciò che esso prova falso (vero) è falso (vero) anche rispetto alle tavole di verità. Di conseguenza un metodo corretto è quello che non commette errori di valutazione. Questo potrebbe farlo anche un metodo banale che non provasse nulla. Noi, però, dimostreremo anche l'implicazione inversa: *se P è insoddisfacibile allora T è chiuso* corrisponde alla *completezza* del metodo; cioè con questo metodo riusciamo a confutare (verificare) tutte le proposizioni false (vere) rispetto alle tavole di verità. Un sistema è completo se è abbastanza potente da riuscire a provare tutto quello che c'è da provare. Anche qui si potrebbe pensare ad un metodo banale che provasse tutto. Questo sarebbe completo, ma non corretto, perché proverebbe cose false, risultando *incoerente*.

Teorema (Correttezza e completezza del metodo dei tableau). La formula P è valida (è una tautologia) se e solo se il tableau per $\neg$P è chiuso.

Dimostrazione. Correttezza. Dimostreremo che se un sottoalbero radicato nel nodo n del tableau T è chiuso, allora l'insieme di formule U(n) in n è insoddisfacibile. La dimostrazione è per induzione sull'altezza h del nodo n nel tableau considerato.

Se h = 0 ed il tableau T è chiuso, allora il nodo contiene due enunciati che sono uno la negazione dell'altro e pertanto U(n) è insoddisfacibile.

Se h>0, allora è stata utilizzata qualche regola di tipo α per un connettivo riconducibile a "$\wedge$" o di tipo β per un connettivo riconducibile a "$\vee$".

$$\begin{array}{c} U(n) = \{P_1\wedge P_2\}\cup U \\ | \\ U(n') = \{P_1;\, P_2\}\cup U_0 \end{array}$$

Nel caso della regola α, è $U(n) = \{P_1\wedge P_2\}\cup U_0$ e $U(n') = \{P_1;P_2\}\cup U_0$ (dove U_0 può essere vuoto) e l'altezza di n' è h-1, dunque, per l'ipotesi induttiva, U(n') è insoddisfacibile. Quindi, se indichiamo con v una qualsiasi interpretazione, deve essere $v(P') = F$ per qualche $P'\in U(n')$. Abbiamo tre possibilità:

(1) per qualche $P_0\in U_0$ è $v(P_0) = F$; ma è $P_0\in U_0\subseteq U(n)$;

(2) $v(P_1) = F$; allora $v(P_1\wedge P_2) = F$;

(3) $v(P_2) = F$; ancora $v(P_1\wedge P_2) = F$.

Essendo, per qualche P$\in$U(n), v(P) = F, abbiamo che U(n) è insoddisfacibile.

$$U(n) = \{P_1 \vee P_2\} \cup U_0$$

$$U(n') = \{P_1\} \cup U_0 \qquad\qquad U(n'') = \{P_2\} \cup U_0$$

Nel caso delle regole β, è U(n) = $\{P_1 \vee P_2\} \cup U_0$, U($n$') = $\{P_1\} \cup U_0$ e U(n'') = $\{P_2\} \cup U_0$; per l' ipotesi induttiva, sia U(n') che U(n'') sono insoddisfacibili. Quindi, indicando ancora con v una qualsiasi interpretazione, abbiamo due possibilità:

(1) per qualche $P_0 \in U_0$ è $v(P_0)$ = F; ma è $P_0 \in U_0 \subseteq U(n)$;

(2) se invece è $v(P_0)$ = V, affinché sia U(n') che U(n'') siano insoddisfacibili deve essere $v(P_1) = v(P_2)$ = F, quindi $v(P_1 \vee P_2)$ = F.

Da ciò possiamo nuovamente concludere che U(n) è insoddisfacibile (Ben-Ari, 1998, pp. 40-41).

Completezza. Per dimostrare che se P è insoddisfacibile allora il tableau per P è chiuso, proveremo che se in tale tableau c'è un ramo aperto allora P è soddisfacibile. Procediamo ancora per induzione sull'altezza h del nodo n nel tableau considerato.

Se h = 0 e il tableau T è aperto, allora il nodo non contiene due letterali che sono uno la negazione dell'altro e P è soddisfacibile.

Se h>0, allora è stata utilizzata qualche regola di tipo α per un connettivo riconducibile a " $\wedge$" o di tipo b per un connettivo riconducibile a "$\vee$".

Nel caso delle regole α, ragionando come precedentemente fatto nel caso della correttezza, esiste un'interpretazione v tale che v(P') = V per ogni P'$\in$U(n') e U(n) è soddisfacibile.

Nel caso delle regole β, esiste un'interpretazione v tale che per ogni $P_0 \in U_0$ è $v(P_0)$ = V e che almeno uno tra $v(P_1)$ e $v(P_2)$ sia V; da ciò segue che $v(P_1 \vee P_2)$ = V. Dunque, U(n) è soddisfacibile. ■

Nel capitolo seguente riprenderemo questo risultato nel caso delle formule predicative.

12. IL SISTEMA DI GENTZEN

12.1. Il sistema deduttivo di Gentzen

Il sistema di Gentzen (sistema G), che in questo paragrafo esamineremo nella sua versione proposizionale, rende possibile la deduzione di una formula a partire da alcuni assiomi operando mediante delle regole di inferenza. Un sistema deduttivo in generale serve a provare una formula mediante un teorema. Un *teorema* è una successione finita ed ordinata di insiemi di formule del linguaggio costruita in modo tale che ognuno di essi sia un *assioma* o sia ottenuto dai precedenti attraverso le regole di inferenza del sistema.

Si noti che stiamo sempre di più prescindendo dal riferimento all'interpretazione delle formule, cioè al valore di verità che esse assumono; ci stiamo muovendo, cioè, a livello sempre più *sintattico*, cioè guardando alla struttura delle formule, piuttosto che alla loro *semantica*, che, in questo caso, è data dai valori di verità.

Nel caso del sistema di Gentzen, un assioma è un insieme finito di formule U che contiene un enunciato e la sua negazione (P e ¬P). Gli assiomi sono quegli insiemi di formule che dovranno essere considerati necessariamente veri; nel nostro caso la scelta è dovuta al fatto che mettere insieme degli enunciati in un insieme significa qui considerarli in una disgiunzione metalinguistica; perciò, la presenza di una coppia (P; ¬P), ci garantisce la soddisfacibilità in ogni interpretazione. Siamo esattamente nella situazione duale a quella del metodo dei tableau, dove mettere insieme due enunciati significava considerarli in una congiunzione metalinguistica: lì, la presenza di una coppia (P, ¬P) rappresentava l'insoddisfacibilità.

Di conseguenza il sistema di Gentzen si presenta in maniera del tutto speculare rispetto a quello dei tableau. Nel metodo dei tableau proposizionali abbiamo considerato delle regole α (quelle che non introducono biforcazioni nel tableau considerato) e delle regole β (che introducono una biforcazione). Faremo un'analoga distinzione anche nel caso delle regole di inferenza per un sistema di Gentzen. Stavolta, però, le regole serviranno ad introdurre i connettivi, invece di eliminarli e le regole α saranno legate ai connettivi del tipo ∨, mentre le regole β saranno legate ai connettivi del tipo ∧.

Considereremo regole basate sulle tabelle seguenti:

α	α_1	α_2
P	$\neg(\neg P)$	
$P \vee Q$	P	Q
$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$
$P \rightarrow Q$	$\neg P$	Q
$\neg(P \leftrightarrow Q)$	$\neg(P \rightarrow Q)$	$\neg(Q \rightarrow P)$

β	β_1	β_2
$P \wedge Q$	P	Q
$\neg(P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$
$\neg(P \rightarrow Q)$	P	$\neg Q$
$P \leftrightarrow Q$	$P \rightarrow Q$	$\rightarrow P$

Le regole di inferenza sono dei due tipi seguenti (α e β):

Regola di inferenza relativa alla tabella di tipo α:

$$\frac{U \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}}{U \cup \{\alpha\}}$$

Regola di inferenza relativa alla tabella di tipo β:

$$\frac{U_1 \cup \{\beta_1\} \qquad\qquad U_2 \cup \{\beta_2\}}{U_1 \cup U_2 \cup \{\beta\}}$$

Una dimostrazione nel sistema *G* è una sequenza di insiemi di formule tale che ciascun elemento o è un assioma o può essere inferito da elementi precedenti.

L'ultimo elemento P è detto *dimostrabile* e scritto: $\vdash P$

Esempio. Dimostriamo nel sistema *G* il teorema:

$$\vdash (A\vee B)\rightarrow(B\vee A)$$

La dimostrazione è la seguente:

1.	$\neg A,\ B,\ A$	Assioma
2.	$\neg B,\ B,\ A$	Assioma
3.	$\neg(A\vee B),\ B,\ A$	β
4.	$\neg(A\vee B),\ (B\vee A)$	α
5.	$(A\vee B)\rightarrow(B\vee A)$	α ■

12.2. Deduzione in *G* e tableau

Una deduzione nel sistema di Gentzen può essere posta in forma di albero: anticipiamo che tale possibilità si rivelerà interessante per il collegamento che essa consentirà con il metodo dei tableau.

Esempio. Scriviamo la dimostrazione dell'esempio precedente, in forma di albero:

```
¬A, B, A            ¬B, B, A
        \           /
       ¬(A∨B),  B,  A
              |
      ¬(A∨B),  (B∨A)
              |
        (A∨B)→(B∨A)
```

In essa risulta evidenziato il ruolo della regola di inferenza di tipo β (corrispondente alla biforcazione) e delle due regole di tipo α, applicate successivamente.

Al lettore non sfuggirà l'analogia di tale disposizione di formule con il tableau (graficamente "capovolto"!) che potrebbe essere costruito per la negazione della formula $(A\vee B) \rightarrow (B\vee A)$. Nell'esempio seguente costruiremo tale tableau.

Esempio. Il tableau della negazione di $(A\vee B)\rightarrow(B\vee A)$ è:

```
¬[(A∨B)→(B∨A)]
       |
      A∨B
    ¬(B∨A)
       |
```

$$
\begin{array}{ccc}
 & A\vee B & \\
 & \neg B & \\
 & \neg A & \\
/ & & \backslash \\
\neg B & & \neg B \\
\neg A & & \neg A \\
A & & B \\
\blacklozenge & & \blacklozenge
\end{array}
$$

Consideriamo la deduzione di Gentzen della formula $(A\vee B) \rightarrow (B\vee A)$ che abbiamo ricavato nell'esempio precedente. In essa compaiono formule simili a quelle che compaiono in questo tableau: in particolare, le formule del tableau sono esattamente le negazioni delle formule che compaiono nell'albero che rappresenta la deduzione in Gentzen.

In particolare, gli assiomi dai quali la precedente deduzione nel sistema di Gentzen trae origine ($\neg A$, B, A e $\neg B$, B, A) possono essere ritrovati, a parte le negazioni, nei nodi finali del tableau che consentono la chiusura dei rami:

$A, \neg B, \neg A$	$B, \neg B, \neg A$	(chiusura del ramo del tableau)
$\neg A, B, A$	$\neg B, B, A$	(assioma di Gentzen)

Esempio. Dimostriamo nel sistema *G* il teorema:

$$\neg\{(A\vee B)\wedge[(\neg A)\wedge(\neg B)]\}$$

La deduzione è la seguente:

$$
\begin{array}{c}
\neg A,\ A,\ B \qquad\qquad \neg B,\ A,\ B \\
\backslash \qquad / \\
\neg(A\vee B),\ A,\ B \\
| \\
\neg(A\vee B),\ \neg(\neg A),\ \neg(\neg B) \\
| \\
\neg(A\vee B),\ \neg[(\neg A)\vee(\neg B)] \\
| \\
\neg\{(A\vee B)\wedge[(\neg A)\wedge(\neg B)]\}
\end{array}
$$

Costruiamo ora il tableau della negazione di $\neg\{(A\vee B)\wedge[(\neg A)\wedge(\neg B)]\}$, ovvero il tableau di $(A\vee B)\wedge[(\neg A)\wedge(\neg B)]$:

$$
\begin{array}{c}
(A\vee B)\wedge[(\neg A)\wedge(\neg B)] \\
| \\
A\vee B \\
(\neg A)\wedge(\neg B) \\
| \\
A\vee B \\
\neg A
\end{array}
$$

¬B
/ \
A B
¬A ¬A
¬B ¬B
♦ ♦

Analogamente a quanto fatto per il metodo dei tableau proposizionali, enunciamo il teorema di completezza e di correttezza.

Teorema (Correttezza e completezza del sistema di Gentzen). Una formula è valida se e solo se è dimostrabile nel sistema di Gentzen.

In questo caso la dimostrazione può procedere rilevando che P è dimostrabile in Gentzen se e soltanto se ¬P ha un tableau chiuso. La prova è una semplicissima induzione sull'altezza dell'albero di dimostrazione che viene trasformato in un tableau chiuso invertendo i passaggi e negando le formule e viceversa. A questo punto, per transitività, si ha l'asserto.

13. CENNI SUL SISTEMA DI HILBERT

13.1. Il sistema di Hilbert

Consideriamo ora un altro sistema deduttivo, che ha preceduto storicamente quello di Gentzen e che è più vicino al nostro modo di fare dimostrazioni in matematica.

Una qualunque sostituzione omogenea di proposizioni a lettere nelle seguenti formule è un assioma nel sistema di Hilbert (sistema *H*) dove "|–" esprime, al solito, la dimostrabilità:

$\vdash A\rightarrow(B\rightarrow A)$	Assioma 1
$\vdash [A\rightarrow(B\rightarrow C)]\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C)]$	Assioma 2
$\vdash [(\neg B)\rightarrow(\neg A)]\rightarrow(A\rightarrow B)$	Assioma 3

Osserviamo innanzitutto che ci sono infiniti assiomi perché A e B possono essere a loro volta sostituite con qualsiasi formula (dunque le formule precedenti devono essere considerate non come singoli assiomi bensì come *schemi di assiomi*).

La regola di inferenza nel sistema di Hilbert è detta *Modus Ponens* (MP):

$$\frac{\vdash A \qquad\qquad \vdash (A\rightarrow B)}{\vdash B}$$

Esempio. Dimostriamo nel sistema *H* il teorema:

$\vdash A\rightarrow A$

La dimostrazione è la seguente:

1.	$\vdash \{A\to[(A\to A)\to A]\}\to\{[A\to(A\to A)]\to(A\to A)\}$	Assioma 2
2.	$\vdash A\to[(A\to A)\to A]$	Assioma 1
3.	$\vdash [A\to(A\to A)]\to(A\to A)$	MP 1, 2
4.	$\vdash A\to(A\to A)$	Assioma 1
5.	$\vdash A\to A$	MP3,4 ■

Da questo esempio introduttivo si può notare che una formula estremamente semplice (la tesi era $\vdash A\to A$) richiede già una dimostrazione tecnicamente piuttosto complicata. Ciò suggerisce l'opportunità di introdurre alcune *regole derivate* per il sistema *H*, che rendano il sistema più maneggevole che con il solo MP. Queste regole saranno dimostrate a livello metalinguistico, cioè si proverà che una dimostrazione che le usa può essere trasformata in una dimostrazione che non le usa. Quindi le nuove regole non aggiungeranno nulla alla potenza dimostrativa del sistema *H*. Questo fatto è molto importante perché aumentare la capacità dimostrativa di un sistema può renderlo incoerente, cioè non corretto.

13.2. Regole derivate del sistema di Hilbert

Come sopra anticipato, il sistema di Hilbert nella forma originale (avente il *Modus Ponens* come unica regola di inferenza) appare di applicazione assai ostica. Per agevolarne l'uso vengono pertanto introdotte, nel sistema *H*, le seguenti *regole derivate*:

Regola di deduzione:

$$\frac{U \cup \{A\} \vdash B}{U \vdash A\to B}$$

Per utilizzare questa regola avremo bisogno di generalizzare la nozione di dimostrazione. Abbiamo detto che in una dimostrazione possiamo introdurre ad ogni passo un assioma o una formula ottenuta dalle precedenti mediante una regola del sistema; in realtà siamo abituati dalla pratica matematica a lavorare anche con *assunzioni*, cioè formule che assumiamo vere per quella particolare dimostrazione e che, quindi, dobbiamo sempre dichiarare nella prova come un debito contratto. Ad esempio se dimostriamo una proprietà per i triangoli isosceli, questa vale sotto l'assunzione che due lati siano uguali e non varrà in generale per tutti i triangoli. Con la scrittura

$$U \vdash A$$

indicheremo che le formule presenti in U sono assunzioni nella dimostrazione di A. Allora la regola di deduzione ci dice che: se abbiamo dimostrato B usando le assunzioni contenute in $U \cup \{A\}$, possiamo considerare dimostrato $A\to B$ sotto le sole assunzioni contenute in U. Nel nostro esempio, se dagli *assiomi della geometria euclidea* e dall'*assunzione che due lati sono uguali* abbiamo dimostrato la proprietà *P*, allora dai soli *assiomi della geometria euclidea* sappiamo di poter dimostrare che *se due lati sono uguali allora P*. In questo modo, dovendo dimostrare un'implicazione, possiamo assumere la premessa e dimostrare la conseguenza. Spesso ciò risulterà tecnicamente molto più facile: come se, usando la nostra metafora, contraessimo un prestito che alla fine restituiamo. Notiamo ancora che questa regola è in qualche modo inversa del Modus Ponens, come si può vedere considerando U vuoto, ma essa è ancora più importante perché stabilisce una stretta corrispondenza tra l'implicazione (linguistica) e la dimostrazione (metalinguistica). Infatti, sempre supponendo per semplicità U vuoto, se dall'assunzione di A *dimostro* B, in simboli $\{A\} \vdash B$, allora posso dimostrare che *se* A *allora* B, in simboli $A \rightarrow B$; e viceversa, usando il *Modus Ponens*.

Purtroppo, questa perfetta corrispondenza si perderà non appena i calcoli logici saranno più complessi.

Proposizione. La regola di deduzione è una regola derivata corretta.

Dimostrazione (Ben-Ari, 1998, pp. 53-54). Si procede per induzione sulla lunghezza n della dimostrazione $U \cup \{A\} \vdash B$.

Se $n = 1$, B si dimostra in un passo, dunque B può essere A, un elemento di U oppure un assioma. Se B è A, allora si ha $\vdash A \rightarrow B$ in quanto $\vdash A \rightarrow A$ è un teorema (si veda l'esempio precedente), dunque $U \vdash A \rightarrow B$. Altrimenti una dimostrazione (in cui non si usa la regola derivata) di $U \vdash A \rightarrow B$ è data da:

1.	$U \vdash B$	Assunzione o Assioma
2.	$U \vdash B \rightarrow (A \rightarrow B)$	Assioma 1
3.	$U \vdash A \rightarrow B$	MP 1,2

Se è $n>1$, l'ultimo passo nella dimostrazione di $U \cup \{A\} \vdash B$ è un'inferenza del tipo precedente, oppure un'inferenza di B che usa il *Modus Ponens*. Nel primo caso il risultato si ottiene dalla dimostrazione per $n = 1$. Se è stato usato il *Modus Ponens*, allora esiste una formula C tale che la i-esima formula nella dimostrazione è $U \cup \{A\} \vdash C$ e la j-esima formula è $U \cup \{A\} \vdash C \rightarrow B$, essendo $i<n$ e $j<n$. Mediante l'ipotesi induttiva, si ottiene una dimostrazione di $U \vdash A \rightarrow C$ e di $U \vdash A \rightarrow (C \rightarrow B)$. Una dimostrazione di $U \vdash A \rightarrow B$ è allora:

i'.	$U \vdash A \rightarrow C$	
j'.	$U \vdash A \rightarrow (C \rightarrow B)$	
$j'+1$.	$U \vdash (A \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B))$	Assioma 2
$j'+2$.	$U \vdash (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)$	MP j', $j'+1$
$j'+3$.	$U \vdash A \rightarrow B$	MP i', $j'+2$

Possiamo allora concludere che ogni dimostrazione che usa la regola di deduzione può essere trasformata in una dimostrazione che non la usa. ■

Usando il *Modus Ponens*, possiamo ancora facilmente provare le seguenti regole derivate:

Regole di contrapposizione:

$$\frac{\vdash (\neg B) \rightarrow (\neg A)}{\vdash A \rightarrow B} \qquad \frac{\vdash A \rightarrow B}{\vdash (\neg B) \rightarrow (\neg A)}$$

dall'Assioma 3 e provando $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B) \rightarrow (\neg A)$. Esercizio.

Regola di transitività:

$$\frac{U \vdash A \rightarrow B \qquad U \vdash B \rightarrow C}{U \vdash A \rightarrow C}$$

provando $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$. Esercizio.

Regola di scambio della premessa:

$$\frac{U \vdash A \to (B \to C)}{U \vdash B \to (A \to C)}$$

provando $\vdash (A\to(B\to C))\to(B\to (A\to C))$. Esercizio.

Regole della doppia negazione:

$$\frac{\vdash [\neg(\neg A)]}{\vdash A} \qquad\qquad \frac{\vdash A}{\vdash [\neg(\neg A)]}$$

provando $\vdash (\neg\neg A) \to A$ e $\vdash A\to(\neg\neg A)$. Esercizio.

Osserviamo che le regole di deduzione derivate nel sistema di Hilbert si presentano ora veramente come principii logici a livello metalinguistico.

Negli esempi seguenti utilizzeremo alcune regole derivate.

Esempio. Dimostriamo nel sistema *H* il teorema:

$\vdash (A\vee B)\to(B\vee A)$

La dimostrazione è la seguente:

1.	$\{\neg A\to B, \neg B\} \vdash \neg A\to B$	Assunzione
2.	$\{\neg A\to B, \neg B\} \vdash \neg B\to\neg\neg A$	Contrapposizione
3.	$\{\neg A\to B, \neg B\} \vdash \neg B$	Assunzione
4.	$\{\neg A\to B, \neg B\} \vdash \neg\neg A$	MP 2, 3
5.	$\{\neg A\to B, \neg B\} \vdash A$	Doppia negazione 4
6.	$\{\neg A\to B\} \vdash \neg B\to A$	Deduzione 5
7.	$\vdash (\neg A\to B)\to(\neg B\to A)$	Deduzione 6
8.	$\vdash (A\vee B)\to(B\vee A)$	Definizione di $\vee$ ■

Esempio. Dimostriamo nel sistema *H* il teorema:

$\vdash (\neg A)\to(A\to B)$

La dimostrazione è la seguente:

1.	$\{\neg A\} \vdash (\neg A)\to[(\neg B)\to(\neg A)]$	Assioma 1
2.	$\{\neg A\} \vdash \neg A$	Assunzione
3.	$\{\neg A\} \vdash (\neg B)\to(\neg A)$	MP 1, 2
4.	$\{\neg A\} \vdash A\to B$	Contrapposizione 3
5.	$\vdash (\neg A)\to(A\to B)$	Deduzione 4 ■

In base a questo teorema, se si potesse dimostrare una formula e la sua negazione allora si potrebbe provare qualsiasi cosa (*Principio dello Pseudo Scoto*).

Analogamente a quanto fatto per il metodo dei tableau proposizionali e per il sistema di Gentzen, enunciamo il teorema di completezza e di correttezza.

Teorema (Correttezza e completezza del sistema di Hilbert). Una formula è valida se e solo se è dimostrabile nel sistema di Hilbert.

La dimostrazione di correttezza si conduce notando che gli assiomi sono validi perché è possibile costruire tableau chiusi semantici per le loro negazioni (il lettore può farlo per esercizio); se la regola di inferenza (*Modus Ponens*) non fosse corretta, potremmo trovare un insieme di formule {A, A→B, B} tale che siano valide A, A→B, ma non B. Allora esisterebbe un'interpretazione v tale che v(B) = F. Dalla validità di A e di A→B segue v(A) = v(A→B) = V per ogni interpretazione; e da qui v(B) = V, in contraddizione con quanto sopra posto.

Per quanto riguarda la completezza del sistema di Hilbert, si può dimostrare che ogni dimostrazione nel sistema di Gentzen può essere meccanicamente trasformata in una dimostrazione nel sistema di Hilbert; e sappiamo inoltre che ogni formula valida può essere verificata nel sistema di Gentzen (per i dettagli della dimostrazione, che è laboriosa, ma non difficile, rimandiamo a: Ben-Ari, 1998, pp. 61-64).

Osserviamo come questo risultato (come d'altronde l'analogo per il sistema di Gentzen) ponga una corrispondenza perfetta tra la *sintassi* e la *semantica* del linguaggio, facendo coincidere la *dimostrabilità* con la *validità*:

$$\vdash P \quad \text{se e soltanto se} \quad \models P$$

Teorema (Coerenza). I sistemi *G* ed *H* sono coerenti; cioè non è possibile provare in essi A e ¬A.

Dimostrazione. Si tratta ancora di una semplice conseguenza del teorema di correttezza, per il quale ciò che è dimostrabile in uno di questi sistemi è anche valido per le tavole di verità; e questo non può accadere contemporaneamente per A e ¬A.