Nome e Cognome

N.B. Ciascun esercizio può ammettere più risposte corrette. Mettete una croce su tutte quelle che ritenete tali.

Esercizio 1. Sia A l'insieme $\{\{b,e\},a,\{c,d,f\}\}$, e sia $\mathcal{P}(A)$ l'insieme dei suoi sottinsiemi.
♣ $\{a\} \subseteq A$
☐ $\{a\} \in A$
☐ $\{b,e\} \subseteq A$
♣ $\{b,e\} \in A$
☐ $\{c\} \subseteq A$
☐ $\{c\} \in A$
♣ $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$
☐ $\{b,e\} \in \mathcal{P}(A)$

Esercizio 2. Siano A e B due insiemi tali che $A \subseteq B$; quali tra le seguenti equazioni è corretta?
♣ $B = A \cup B$
♣ $A = A \cap B$
☐ $A - \emptyset = \emptyset - A$
♣ $A - B = \emptyset - B$
♣ $A - (A - B) = A$
♣ $A - (B - A) = A$
☐ $A \times B = B \times A$
☐ $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
☐ $A \times \emptyset = A$
♣ $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$
♣ $(\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)) \cap (\mathcal{P}(B) \times \mathcal{P}(A)) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$

Esercizio 3. Per quali delle seguenti equazioni è possibile trovare opportuni insiemi A e B che la rendono vera?
♣ $A = (A \cup B) \cap A$
♣ $A = (A \cap B) \cup B$
♣ $A = A \cap \emptyset$
♣ $A - (B \times \emptyset) = (B \times \emptyset) - A$
♣ $A \times B = B \times A$
☐ $(A \cup \{\emptyset\}) \times \{\emptyset\} = \emptyset$
☐ $A = \mathcal{P}(A)$

Esercizio 4. Sia $A = \{a,b,c,d\}$, sia $R = \{(a,b),(b,c),(c,d),(d,a)\} \subseteq A \times A$ una relazione binaria su A e sia $Tr(R)$ la sua chiusura transitiva.

☐ R è una relazione transitiva
♣ R è una relazione antisimmetrica
♣ R è una funzione iniettiva
♣ $Tr(R)$ è una relazione di equivalenza
♣ $Tr(R) \cup (A \times A)$ è una relazione di equivalenza
☐ $Tr(R)$ è una funzione

Esercizio 5. Sia $f : A \to B$ una funzione iniettiva e sia $g : B \to A$ una funzione bigettiva. Allora

☐ f è sicuramente bigettiva
☐ f è bigettiva solo se $f = g^{-1}$
☐ $g \circ f$ è sicuramente suriettiva
♣ $g \circ f$ è sicuramente iniettiva

Esercizio 6. Trovare una relazione di equivalenza sui numeri naturali tale che l'insieme delle sue classi di equivalenza abbia un numero pari di elementi.

$\{(n, m) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \,:\, n$ ed m sono entrambi pari, o entrambi dispari$\}$

Esercizio 7. Trovare, se esiste, una relazione di equivalenza sui numeri pari tale che l'insieme delle sue classi di equivalenza sia in corrispondenza biunivoca con l'insieme di tutti i numeri naturali. Nel caso una tale relazione non esista, spiegare perché.

$\mathcal{E}$ insieme dei numeri pari
$R = \{(n, m) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \,:\, n = m\}$
$f : \mathcal{N} \to R$ biunivoca, definita come segue: $f(n) = (2n, 2n)$

Esercizio 8. Trovare, se esiste, una relazione di equivalenza sui numeri naturali tale che l'insieme delle sue classi di equivalenza sia vuoto. Nel caso una tale relazione non esista, spiegare perché.

Non può esistere una tale relazione perché l'insieme queziente di qualunque relazione di equivalenza su N contiene sicuramente, per ogni $n \in \mathcal{N}$, la classe di equivalenza [n].

Esercizio 9. Sia $\mathcal{N}$ l'insieme dei numeri naturali e sia $\mathcal{M}$ l'insieme che contiene tutti quei sottoinsiemi X di $\mathcal{N}$ tali che $X = \{n \in \mathcal{N} \,:\, n \leq m\}$ per un qualche numero naturale m. Ad esempio: $\{0, 1\} \in \mathcal{M}$, $\{2, 3, 0, 1\} \in \mathcal{M}$, ma $\{2\} \notin \mathcal{M}$. Dire se la cardinalità di $\mathcal{M}$ è maggiore, minore o uguale a quella di $\mathcal{N}$ e motivare la risposta.

Stessa cardinalità.
La seguente funzione $f : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ è bigettiva:
$f(n) = \{0, 1, \ldots n\}$

Esercizio 10. Sia $\mathcal{N}$ l'insieme dei numeri naturali. Dimostrare che $\mathcal{N}$ ha la stessa cardinalità di $\mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$.

La seguenti funzioni sono entrambe iniettive:
$f : \mathcal{N} \to \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ definita come $f(n) = (n, n, n)$ e
$g : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ definita come $g(a, b, c) = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$
Per il teorema di Bernstein esiste una funzione bigettiva.

Esercizio 11. Chi ha più elementi: $\mathcal{P}(\emptyset)$ oppure $\{\emptyset\} \times \{\emptyset\}$? Argomentare!

Stessa cardinalità. Contengono entrambi un solo elemento:
$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ e $\{\emptyset\} \times \{\emptyset\} = \{(\emptyset, \emptyset)\}$