Nome e Cognome

N.B. Ciascun esercizio può ammettere più risposte corrette. Mettete una croce su tutte quelle che ritenete tali.

Esercizio 1. Sia A l'insieme $\{1, \{2\}, \{3, 4\}\}$, e sia $\mathcal{P}(A)$ l'insieme dei suoi sottinsiemi.
- ♣ $\{1\} \subseteq A$
- ☐ $\{1\} \in A$
- ☐ $\{2\} \subseteq A$
- ♣ $\{2\} \in A$
- ☐ $\{3\} \subseteq A$
- ☐ $\{3\} \in A$
- ☐ $\{2, 3, 4\} \subseteq A$
- ☐ $\{2, 3, 4\} \in A$
- ♣ $\{1\} \in \mathcal{P}(A)$
- ☐ $\{2\} \in \mathcal{P}(A)$

Esercizio 2. Quali tra le seguenti equazioni risulta essere sempre vera, qualunque siano gli insiemi A e B?
- ♣ $A = A \cup A$
- ♣ $A = A \cap A$
- ♣ $A = A \cup \emptyset$
- ☐ $A = A \cap \emptyset$
- ☐ $A - \emptyset = \emptyset - A$
- ♣ $A - (A - B) \subseteq A$
- ♣ $A - (A - B) \subseteq B$
- ☐ $A \times B = B \times A$
- ☐ $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- ♣ $A \times \emptyset = \emptyset$
- ☐ $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$

Esercizio 3. Per quali delle seguenti equazioni è possibile trovare opportuni insiemi A e B che la rendono vera?
- ♣ $A = A \cup B$
- ♣ $A = A \cap B$
- ♣ $A = A \cap \emptyset$
- ♣ $A - B = B - A$
- ♣ $A \times B = B \times A$
- ♣ $A \times \emptyset = \emptyset$
- ☐ $A = \mathcal{P}(A)$

Esercizio 4. Sia $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e sia $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\} \subseteq A \times A$ una relazione binaria su A.
- ☐ R è una relazione transitiva
- ☐ R è una relazione simmetrica
- ♣ R è una relazione antisimmetrica
- ♣ R è una funzione iniettiva
- ♣ La chiusura transitiva di R è una relazione di equivalenza
- ☐ La chiusura transitiva di R è una funzione

Esercizio 5. Siano $f : A \to B$ e $g : B \to C$ due funzioni. Allora
- ♣ $g \circ f$ è sicuramente iniettiva se lo sono sia f che g
- ☐ $g \circ f$ può essere iniettiva anche se f non lo è
- ♣ $g \circ f$ può essere iniettiva anche se g non lo è
- ♣ $g \circ f$ è sicuramente suriettiva se lo sono sia f che g
- ♣ $g \circ f$ può essere suriettiva anche se f non lo è
- ☐ $g \circ f$ può essere suriettiva anche se g non lo è
- ☐ se $g \circ f$ è bigettiva allora lo sono sicuramente sia f che g

Esercizio 6. Trovare una relazione di equivalenza sui numeri naturali tale che l'insieme delle sue classi di equivalenza contenga un solo elemento

La relazione totale, ovvero: $m \equiv n$ *sse* $m, n \in \mathcal{N}$.

Esercizio 7. Trovare una relazione di equivalenza sui numeri naturali tale che l'insieme delle sue classi di equivalenza contenga sette elementi

Le classi di resto modulo 7, ovvero: $m \equiv_7 n$ *sse* $m - n$ *divisibile per* 7

Esercizio 8. Trovare una relazione di equivalenza sui numeri naturali tale che l'insieme delle sue classi di equivalenza contenga infiniti elementi

L'identità, ovvero: $m \equiv n$ *sse* $m = n$

Esercizio 9. Dimostrare che l'insieme dei numeri naturali divisibili per 7 ha la stessa cardinalità di quello dei numeri divisibili per 9.

La funzione $f(7n) = 9n$ è una funzione bigiettiva dall'insieme dei naturali divisibili per 7 a quello dei naturali divisibili per 9. Quindi f mostra che i due insiemi hanno la stessa cardinalità.

Esercizio 10. Sia $\mathcal{N}$ l'insieme dei numeri naturali. Dimostrare che $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ ha la stessa cardinalità di $\mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$.

Le seguenti funzioni sono entrambe iniettive:
$f : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$definita come $f(n, m) = (n, m, m)$ e
$g : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ definita come $f(n, m, q) = (2^n \cdot 3^m, q)$
Per il teorema di Bernstein esiste una funzione bigettiva.

Esercizio 11. Sia $\mathcal{B}$ l'insieme $\{0, 1\}$. Dimostrare che $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ non ha la stessa cardinalità di $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B}$.

$\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ ha 4 elementi, mentre $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ ha 8 elementi.