UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "LA SAPIENZA"
CORSO DI STUDI IN INFORMATICA
ESERCITAZIONI AL CORSO DI LOGICA MATEMATICA

TEORIA DEGLI INSIEMI I: OPERAZIONI ELEMENTARI

Esercizio 1. *Verificare le seguenti proprieta':*

- $A \cup B = B \cup A$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $A \cup \overline{A} = U$
- $A \cup U = U$
- $A \cap U = A$
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $\overline{\overline{A}} = A$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Esercizio 2. *Definisco $A \to B = \overline{A} \cup B$. Utilizzando le proprieta' dell'esercizio precedente, dimostrare che:*

(1) $U = A \to (B \to A)$
(2) $U = (\overline{B} \to \overline{A}) \to (A \to B)$
(3) $\overline{A} = A \to \emptyset$
(4) $A \cup B = (A \to \emptyset) \to B$

Soluzione.

(1) $A \to (B \to A) = \overline{A} \cup (\overline{B} \cup A) = \overline{A} \cup (A \cup \overline{B}) = (\overline{A} \cup A) \cup \overline{B} = U \cup \overline{B} = U$
(2) $(\overline{B} \to \overline{A}) \to (A \to B) = \overline{(\overline{\overline{B}} \cup \overline{A})} \cup (\overline{A} \cup B) = (\overline{B} \cap A) \cup (\overline{A} \cup B) = (\overline{B} \cup (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup (\overline{A} \cup B)))$
$= U \cap U = U$
(3) $\overline{A} \cup \emptyset = \overline{A}$
(4) $\overline{\overline{A} \cup \emptyset} \cup B = (A \cap U) \cup B = A \cup B$

□

Esercizio 3. *Sia $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, indico con $\wp(A)$ l'insieme delle parti di A. Calcolare:*

(1) $A \cap \emptyset$
(2) $A \cap \{\emptyset\}$
(3) $A \times \emptyset$
(4) $A \times \{\emptyset\}$
(5) $(\{\emptyset\} \times A) \cap (A \times \{\emptyset\})$
(6) $\wp(A)$
(7) $\wp(A) \cap \{\emptyset\}$

Soluzione.

(1) $\emptyset$

Date: 5 – 10 – 2006.

(2) $\{\emptyset\}$
(3) $\emptyset$
(4) $\{<\emptyset,\emptyset>,<\{\emptyset\},\emptyset>\}$
(5) $\{<\emptyset,\emptyset>\}$
(6) $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$
(7) $\{\emptyset\}$

$\square$

Esercizio 4. *Definisco con $A \times B$ il prodotto cartesiano di A con B, $p_1(A \times B)$ (risp. $p_2(A \times B)$) la proiezione sinistra (risp. destra) di tale proiezione.*

(1) Trova un insieme A tale che $A \times A = A$
(2) Supposto $A \times B \neq \emptyset$, dimostra che $A \times B = B \times A$ se e solo se $A = B$

Soluzione.

(1) $A = \emptyset$
(2) Se $A = B$ allora banalmente $A \times B = B \times A$. Viceversa, supponiamo $A \times B = B \times A$ e dimostriamo $A = B$, supponendo $A \times B \neq \emptyset$. Da quest'ultima ipotesi osservo che $p_1(A \times B) = A$ e $p_1(B \times A) = B$. Siccome $A \times B = B \times A$, allora $p_1(A \times B) = p_1(B \times A)$, ovvero $A = B$.

$\square$

Esercizio 5. *In questo esercizio $\mathbb{N}$ denota al solito l'insieme dei numeri naturali:*

(1) dare un esempio di due sottoinsiemi disgiunti e finiti di $\mathbb{N}$
(2) dare un esempio di due sottoinsiemi finiti di $\mathbb{N}$ che non siano disgiunti
(3) dare un esempio di due sottoinsiemi finiti A e B di $\mathbb{N}$ tali che $A \subseteq B$
(4) dare un esempio di tre sottoinsiemi A, B, C di $\mathbb{N}$ tali che:

$$A \cup (B \cap C) \neq (A \cup B) \cup (A \cup C)$$

Esercizio 6. *Sia $A = \{1, 2, 3\}$. Calcolare l'insieme delle parti di A e scrivere il diagramma dell'insieme parzialmente ordinato $(P(A), \subseteq)$*