

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "LA SAPIENZA"
 CORSO DI STUDI IN INFORMATICA
 ESERCITAZIONI AL CORSO DI LOGICA MATEMATICA

LOGICA PROPOSIZIONALE

Esercizio 1. Utilizzando le tavole di verità mostra se sono giuste le seguenti conseguenze logiche:

- (1) $A, A \rightarrow B \Vdash A \wedge B$
- (2) $A, B \rightarrow A \Vdash A \wedge B$
- (3) $(P \vee Q) \rightarrow R, Q \rightarrow P, Q \Vdash R$
- (4) $(P \wedge Q) \rightarrow R, Q \rightarrow P, Q \Vdash R$
- (5) $P \rightarrow Q, Q \Vdash P \rightarrow (Q \wedge R)$
- (6) $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Vdash P \rightarrow (Q \wedge R)$
- (7) $P \rightarrow Q, \neg Q \Vdash \neg P$
- (8) $P \rightarrow Q, \neg Q \Vdash \neg P \rightarrow Q$
- (9) $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Vdash Q \rightarrow (P \rightarrow R)$
- (10) $P \wedge (Q \wedge R) \Vdash P \vee Q$
- (11) $P \vee (Q \wedge R) \Vdash P \vee Q$
- (12) $(L \wedge M) \rightarrow \neg P, I \rightarrow P, M, I \Vdash \neg L$
- (13) $(L \wedge M) \rightarrow \neg P, L \rightarrow P, M, I \Vdash \neg L$
- (14) $(L \wedge M) \rightarrow \neg P, L \rightarrow P, L, I \Vdash \neg L$
- (15) $\Vdash P \rightarrow \neg P$
- (16) $\Vdash P \vee \neg P$

Dai una dimostrazione in deduzione naturale dei casi che hai verificato essere conseguenze logiche.

Soluzione.

(1) è una conseguenza logica, una dimostrazione è la seguente:

$$\frac{A \quad \frac{A \quad A \rightarrow B}{B}}{A \wedge B}$$

(2) non è una conseguenza logica, difatti ponendo $v(A) = 1, v(B) = 0$, si rendono vere le ipotesi ma falsa la tesi

(3) è una conseguenza logica, una dimostrazione è la seguente:

$$\frac{\frac{Q}{P \vee Q} \quad (P \vee Q) \rightarrow R}{R}$$

(4) è una conseguenza logica, una dimostrazione è la seguente:

$$\frac{\frac{Q \quad Q \rightarrow P}{P} \quad Q}{\frac{P \wedge Q}{R} \quad (P \wedge Q) \rightarrow R}$$

(5) non è una conseguenza logica, difatti ponendo $v(P) = 1, v(Q) = 1, v(R) = 0$, si rendono vere le ipotesi ma falsa la tesi

(6) è una conseguenza logica, una dimostrazione è la seguente:

$$\frac{\frac{[P] \quad P \rightarrow Q}{Q} \quad \frac{\frac{[P] \quad P \rightarrow Q}{Q} \quad Q \rightarrow R}{R}}{Q \wedge R}}{P \rightarrow (Q \wedge R)}$$

(7) è una conseguenza logica, una dimostrazione è la seguente:

$$\frac{\frac{[P] \quad P \rightarrow Q}{Q} \quad \neg Q}{\perp}}{\neg P}$$

(8) non è una conseguenza logica, tutte le valutazioni di verità che rendono vere le ipotesi rendono falsa la tesi

(9) è una conseguenza logica, una dimostrazione è la seguente:

$$\frac{\frac{[P] \quad P \rightarrow (Q \rightarrow R)}{Q \rightarrow R} \quad [Q]}{\frac{R}{P \rightarrow R}}}{Q \rightarrow (P \rightarrow R)}$$

(10) è una conseguenza logica, una dimostrazione è la seguente:

$$\frac{P \wedge (Q \wedge R)}{P}}{P \vee Q}$$

(11) è una conseguenza logica, una dimostrazione è la seguente:

$$\frac{P \vee (Q \wedge R) \quad \frac{[P] \quad \frac{[Q \wedge R]}{Q}}{P \vee Q}}{P \vee Q}}{P \vee Q}}$$

(12) è una conseguenza logica, una dimostrazione è la seguente:

$$\frac{\frac{I \rightarrow P \quad I}{P} \quad \frac{\frac{[L] \quad M}{L \wedge M} \quad (L \wedge M) \rightarrow \neg P}{\neg P}}{\perp}}{\neg L}$$

(13) è una conseguenza logica, una dimostrazione è la seguente:

$$\frac{\frac{L \rightarrow P \quad [L]}{P} \quad \frac{\frac{[L] \quad M}{L \wedge M} \quad (L \wedge M) \rightarrow \neg P}{\neg P}}{\perp}}{\neg L}$$

(14) non è una conseguenza logica, tutte le valutazioni di verità che rendono vere le ipotesi rendono falsa la tesi

(15) non è una conseguenza logica, infatti posto $v(P) = 1$ otteniamo $v(P \rightarrow \neg P) = 0$

(16) è una conseguenza logica, una dimostrazione è la seguente (utilizza la regola *RAA*):

$$\frac{\frac{[\neg(P \vee \neg P)] \quad \frac{[P]}{P \vee \neg P}}{\perp}}{\frac{\perp}{\neg P}}}{\frac{[\neg(P \vee \neg P)] \quad \frac{\perp}{\neg P}}{P \vee \neg P}}$$

□