UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "LA SAPIENZA"
CORSO DI STUDI IN INFORMATICA
ESERCITAZIONI AL CORSO DI LOGICA MATEMATICA

TEORIA DEGLI INSIEMI II: RELAZIONI E FUNZIONI

1. Relazioni

Esercizio 2 (Esempi di proprieta' sulle relazioni). *Sia $A = \{1, 2, 3, 4\}$, definire su A un esempio di:*

(1) relazione totale;
(2) relazione vuota;
(3) relazione riflessiva, antisimmetrica ma non transitiva;
(4) relazione di equivalenza, e calcolare le sue classi di equivalenza;
(5) relazione di ordine stretto;
(6) relazione di ordine largo.

Soluzione. 1) La relaione totale e' sempre unica ed e' $A \times A$.
2) La relazione vuota e' sempre unica ed e' $\emptyset$.
3) Un esempio e' $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 3)\}$.
4) Un esempio e' l'identita': $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$, le cui classi di equivalenza sono i singoletti $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$. Oppure possiamo prendere la chiusura riflessiva e transitiva della relazione definita nel punto 3): $R' = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (2, 1), (3, 2), (3, 1)\}$. In questo caso le classi di equivenza sono: $\{1, 2, 3\}$ e $\{4\}$.
5) Un esempio e' $R = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$.
6) Un esempio e' $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$. □

Esercizio 3 (Relazioni sui naturali). *Considera le seguenti relazioni su* **N** *e rispondi alle domande argomentando la risposta:*

- *la relazione $\sim_2$ cosi' definita:*

$$n \sim_2 m \text{ sse } n = m^2$$

  (1) $\sim_2$ e' finita?
  (2) $\sim_2$ e' antiriflessiva?
  (3) $\sim_2$ e' antisimmetrica?

- *la relazione $\equiv_2$ cosi' definita:*

$$n \equiv_2 m \text{ sse } 2 \text{ divide } n - m$$

  (1) $\equiv_2$ e' finita?
  (2) $\equiv_2$ e' riflessiva?
  (3) $\equiv_2$ e' simmetrica?
  (4) $\equiv_2$ e' un'equivalenza? Se si, descrivere quali sono le sue classi di equivalenza.

Date: 12 – 10 – 2006.

Soluzione. *Riguardo* $\sim_2$*: 1) NO; 2) NO: ad esempio* $1 \sim_2 1$*; 3) SI, perche' se* $n \sim_2 m$*, allora o* $n = m$ *(casi* $n, m = 0, 1$*), oppure* $m \not\sim_2 n$*.*

Riguardo $\equiv_2$*: 1) NO e' infinita; 2) SI; 3) SI; 4) SI, le classi di equivalenza sono due: l'insieme dei numeri pari e quello dei numeri dispari.* □

Ricorda che una relazione R e' un sottoinsieme di un prodotto cartesiano $A \times B$. Se si restringono o si estendono gli insiemi A e B, la relazione R puo' mutare le sue proprieta'. Scopo del prossimo esercizio e' studiare quali fra le proprieta' da noi prese in considerazione (riflessivita', simmetria, transitivita' etc...) sono conservate e quali perdute quando si restringe o si estende il dominio di una relazione:

Esercizio 4 (Estensioni e riduzioni di relazioni)**.** *Sia* R *una relazione su un insieme* A*, ovvero un sottoinsieme di* $A \times A$*. Considera* $B \subset A \subset C$*, rispondi alle domande seguenti giustificando la risposta:*

(1) *se* R *e' riflessiva su* A*, allora:*
   (a) R *e' riflessiva su* B*?*
   (b) R *e' riflessiva su* C*?*
(2) *se* R *e' antiriflessiva su* A*, allora:*
   (a) R *e' antiriflessiva su* B*?*
   (b) R *e' antiriflessiva su* C*?*
(3) *se* R *e' simmetrica su* A*, allora:*
   (a) R *e' simmetrica su* B*?*
   (b) R *e' simmetrica su* C*?*
(4) *se* R *e' antisimmetrica su* A*, allora:*
   (a) R *e' antisimmetrica su* B*?*
   (b) R *e' antisimmetrica su* C*?*
(5) *se* R *e' transitiva su* A*, allora:*
   (a) R *e' transitiva su* B*?*
   (b) R *e' transitiva su* C*?*

Soluzione. *1a) SI; 1b) NO; 2a) SI; 2b) SI; 3a) SI; 3b) SI; 4a) SI; 4b) SI; 5a) SI; 5b) SI. Giustifica le risposte.* □

Esercizio 5. *Sia* I *l'insieme delle circonferenze del piano; considera la relazione:*

$$C = \{(a, b) \text{ sse } a, b \text{ sono circonferenze concentriche}\}$$

Dire se si tratta di una relazione di equivalenza, di ordine largo o di ordine stretto.

Sia ora G *l'insieme delle circonferenze e dei triangoli del piano; quali proprieta' soddisfa* C *su* G*?*

Soluzione. C *e' una equivalenza.* C *su* G *soddisfa la transitivita' e la simmetria, ma non piu' la riflessivita', quindi su* G *non e' una equivalenza.* □

Esercizio 6 (Chiusura di una relazione)**.** *Sia* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *e* $R = \{(1, 2), (2, 1), (3, 4)\}$ *una relazione su* A*:*

(1) *calcola la chiusura riflessiva di* R*;*
(2) *calcola la chiusura simmetrica di* R*;*
(3) *calcola la chiusura transitiva di* R*;*
(4) *la chiusura simmetrica e transitiva di* R *e' una relazione di equivalenza su* A*?*

Soluzione. *1)* $R' = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 1), (3, 4)\}$.

2) $R' = \{(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$.

3) $R' = \{(1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 4)\}$

4) Si, infatti tale chiusura e': $R' = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$*. Le classi di equivalenza sono:* $\{1, 2\}$ *e* $\{3, 4\}$*.* □

7. FUNZIONI

Esercizio 8. *Sia* $F = \{(0,1),(0,2),(0,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,7)\} \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N}$. *Rispondi, argomentando la risposta, alle seguenti domande:*

(1) *F e' una funzione di dominio e codominio* $\mathbf{N}$*?*
(2) *F e' una funzione di dominio* $\{0,1,2\}$ *e codominio* $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$*?*
(3) $G = \{(a,b)$ *tale che* $(b,a) \in F\}$ *e' una funzione di dominio* $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$*?*
(4) *Su quali sottoinsiemi di* $\mathbf{N}$, *G e' una funzione? Calcola l'insieme delle immagini di G.*

Soluzione. *1) No, perche' non rispetta la condizione di unicita': ad esempio a* 0 *associa gli elementi* $1, 2$ *e* 3.

2) No, per lo stesso motivo di 1).

3) No, perche' non rispetta la condizione di totalita': a 8 *non associa alcun elemento.*

4) Su tutti i sottoinsiemi di $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. *L'insieme delle immagini e':* $\{0,1,2\}$. □

Esercizio 9. *Sia* $F = \{(x,y)$ *tali che* $y = 10 - x\}$.

(1) *F e' una funzione da* $\mathbf{N}$ *in* $\mathbf{N}$*?*
(2) *F e' una funzione da* $\mathbf{Z}$ *in* $\mathbf{N}$*?*
(3) *F e' una funzione da* $\mathbf{N}$ *in* $\mathbf{Z}$*? e' iniettiva? e' suriettiva?*
(4) *F e' una funzione da* $\mathbf{Z}$ *in* $\mathbf{Z}$*? e' iniettiva? e' suriettiva?*

Soluzione. *1,2) NO, non rispetta la condizione di totalita': non associa alcun numero naturale per* $x > 10$.

3) Si, e' una funzione da $\mathbf{N}$ *in* $\mathbf{Z}$. *Inoltre e' iniettiva ma non e' suriettiva: ad esempio* 11 *non e' nell'insieme delle immagini di* F.

4) Si, e' una funzione da $\mathbf{Z}$ *in* $\mathbf{Z}$. *Inoltre e' sia iniettiva che suriettiva. Dimostralo.* □