UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "LA SAPIENZA"
CORSO DI STUDI IN INFORMATICA
ESERCITAZIONI AL CORSO DI LOGICA MATEMATICA

LOGICA PROPOSIZIONALE

TAVOLE DI VERITÀ, COMPLETEZZA VERO-FUNZIONALE

Esercizio 1. *Calcola le tavole di verità delle seguenti formule:*

- $A \to (B \to A)$;
- $(A \vee B) \to (\neg A \wedge (B \to C)$;
- $(A \leftrightarrow A) \to (B \leftrightarrow \neg B)$.

Dire quando sono tautologie, soddisfacibili, refutabili, contraddittorie.

Soluzione. La tavola di verità di $A \to (B \to A)$ è:

A	B	C	$A \to (B \to A)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

La formula è una tautologia, quindi ovviamente pure soddisfacibile.
La tavola di verità di $(A \vee B) \to (\neg A \wedge (B \to C)$ è:

A	B	C	$(A \vee B) \to (\neg A \wedge (B \to C)$
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

La formula è soddisfacibile e refutabile.
La tavola di verità di $(A \leftrightarrow A) \to (B \leftrightarrow \neg B)$ è:

Date: 14 – 12 – 2006.

A	B	$(A \leftrightarrow A) \to (B \leftrightarrow \neg B)$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	0

La formula è contraddittoria quindi ovviamente pure refutabile. □

L'interpretazione di una formula associa ad ogni proposizione P in cui occorrono n variabili proposizionali una tavola di verità di $n+1$ colonne, ovvero una funzione $[\![P]\!] : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Con i prossimi esercizi studiamo la corrispondenza inversa, cioè la possibilità di associare ad ogni funzione $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ una formula proposizionale P tale che $[\![P]\!] = f$.

Esercizio 2 (Completezza vero-funzionale)**.** *Considera l'insieme di simboli $\{\neg, \vee, \wedge\}$ e dimostra che per ogni funzione $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ con $n > 0$, esiste una formula proposizionale P che utilizza i soli connetivi $\neg, \vee, \wedge$ e tale che $[\![P]\!] = f$.*

Soluzione. Una funzione $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ corrisponde a una tavola di verità M di $n+1$ colonne. La proposizione corrispondente P si costruisce nel seguente modo. Se f è la funzione costante 0, allora:

$$P = (A_1 \wedge \neg A_1) \vee \cdots \vee (A_n \wedge \neg A_n)$$

che è una proposizione con n variabili e falsa per ogni interpretazione di $A_1, \ldots, A_n$.

Se invece f non è la funzione costante 0, allora la tavola di verità corrispondente ha alcune righe con valore 1 nella $(n+1)$-esima colonna, chiamiamo $M_{i_1}, \ldots, M_{i_k}$ tali righe. P sarà una disgiunzione con k disgiunti:

$$P = Q_1 \vee \cdots \vee Q_k$$

Ogni disgiunto Q_j dovrà essere vero solo per l'interpretazione della riga corrispondente M_{i_j}: la riga assegna valori $0, 1$ alle n variabili proposizionali, quindi 1 a certe variabili e 1 alla negazione di certe altre variabili; una congiunzione è vera se e solo se tutti i congiunti sono veri, quindi Q_i potrà essere una congiunzione della forma:

$$Q_j = l_1 \wedge \cdots \wedge l_n$$

dove $l_q = A_q$ se $M_{i_j,q} = 1$, o $l_q = \neg A_q$ se $M_{i_j,q} = 0$.
Siccome una disgiunzione è vera se e solo se un disgiunto è vero, e una congiunzione è vera se e solo se tutti i congiunti sono veri, si può facilmente vedere che la tavola di verità associata a P è M. □

Si dice *letterale* una formula che è variabile proposizionale o la negazione di una variabile proposizionale. Osserva che le formule utilizzate nell'esercizio 2 hanno una struttura molto precisa: sono disgiunzioni di congiunzioni di letterali. Questa struttura si chiama *forma normale disgiuntiva*; l'esercizio 2 ha quindi dimostrato che tutte le tavole di verità sono definibili da proposizioni in forma normale disgiuntiva. Vediamo alcuni esempi:

Esercizio 3. *Associa alle tavole di verità calcolate nell'esercizio 1 le formule corrispondenti in forma normale disgiuntiva, utilizzando l'esercizio 2.*

In generale osserva che l'esercizio 2 ha dimostrato che tutte le formule proposizionali sono equivalenti a formule in forma normale disgiuntiva.

Soluzione. La forma normale disgiuntiva associata alla tavola di verità di $A \to (B \to A)$ è:

$$(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee$$

$$\vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$$

Osserva come in questo caso il metodo determinato dall'esercizio 2 definisca una formula molto ridondante per caratterizzare una tavola di verità.

La forma normale disgiuntiva associata alla tavola di verità di $(A \vee B) \to (\neg A \wedge (B \to C)$ è:

$$(\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$$

La forma normale disgiuntiva associata alla tavola di verità di $(A \leftrightarrow A) \to (B \leftrightarrow \neg B)$ è:

$$(\neg A \wedge A) \vee (\neg B \wedge B)$$

□

Esercizio 4. *Come conseguenza del risultato dell'esercizio 2 dimostra che ogni tavola di verità è associata ad una formula con i soli connettivi* $\neg, \to$.

Soluzione. Basta osservare che $\vee$ e $\wedge$ sono definibili dai connettivi $\neg$ e $\to$. □

CALCOLO DI HILBERT

Il calcolo di Hilbert è definito dagli assiomi:

A1: $A \to (B \to A)$
A2: $(A \to (B \to C)) \to (A \to B) \to (A \to C)$
A3: $(\neg B \to \neg A) \to A \to B$

e dalla regola di *Modus Ponens:*

$$\frac{A \qquad A \to B}{B}$$

Indico con $\vdash A$ quando esiste una dimostrazione nel calcolo di Hilbert della formula A. Inoltre se U è un insieme di formule, indico con $U \vdash A$ quando esiste una dimostrazione nel calcolo di Hilbert della formula A che utilizza eventualmente le formule in U come assiomi ulteriori a A1, A2 e A3, le formule in U sono dette *ipotesi dellla dimostrazione*.

Esercizio 5. *Dimostra* $\vdash A \to A$

Soluzione.

$\vdash (A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to A \to A)$	A2
$\vdash A \to ((A \to A) \to A)$	A1
$\vdash (A \to (A \to A)) \to A \to A$	MP
$\vdash A \to (A \to A)$	A1
$\vdash A \to A$	MP

□

L'esercizio precedente mostra come la ricerca di una dimostrazione nel calcolo di Hilbert è molto laboriosa. Per facilitare tale ricerca vengono introdotte delle regole ulteriori rispetto al modus ponens, che sono comunque derivabili dal modus ponens e dagli assiomi A1, A2, A3.

Esercizio 6 (Regole derivate). *Dimostra che nel calcolo di Hilbert valgono le seguenti regole derivate:*

Regola di deduzione: $$\frac{U, A \vdash B}{U \vdash A \to B}$$

Regola di contrapposizione: $$\frac{U \vdash \neg B \to \neg A}{U \vdash A \to B}$$

Regola di transitività: $$\frac{U \vdash A \to B \qquad U \vdash B \to C}{U \vdash A \to C}$$

Regola di scambio premesse: $$\frac{U \vdash A \to (B \to C)}{U \vdash B \to (A \to C)}$$

Ex falso quodlibet: $$\frac{U \vdash A \qquad U \vdash \neg A}{U \vdash B}$$

Soluzione. La prova della derivabilità della regola di deduzione è nelle dispense.
La regola di contrapposizione è facilmente derivabile:

$U \vdash \neg B \to \neg A$	
$U \vdash (\neg B \to \neg A) \to A \to B$	A3
$U \vdash A \to B$	MP

La regola di transitività corrisponde alla dimostrazione di $U, A \to B, B \to C \vdash A \to C$:

$U, A \to B, B \to C, A \vdash A$	ipotesi
$U, A \to B, B \to C, A \vdash A \to B$	ipotesi
$U, A \to B, B \to C, A \vdash B$	MP
$U, A \to B, B \to C, A \vdash B \to C$	ipotesi
$U, A \to B, B \to C, A \vdash C$	MP
$U, A \to B, B \to C \vdash A \to C$	regola di deduzione

Osserva come per dimostrare $U, A \to B, B \to C \vdash A \to C$ abbia avuto un ruolo fondamentale la regola derivata di deduzione, che permette di dare una dimostrazione semplice e immediata della transitività.

La derivazione della regola di scambio delle premesse è immediata. Deriviamo invece la regola "ex falso quodlibet", che corrisponde a dimostrare $U, A, \neg A \vdash B$:

$U, A, \neg A \vdash \neg A \to (\neg B \to \neg A)$	A1
$U, A, \neg A \vdash \neg A$	ipotesi
$U, A, \neg A \vdash \neg B \to \neg A$	MP
$U, A, \neg A \vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$	A3
$U, A, \neg A \vdash A \to B$	MP
$U, A, \neg A \vdash A$	ipotesi
$U, A, \neg A \vdash B$	MP

$\square$

Osserva che la regola cosidetta *ex falso quodlibet* mostra che se da un insieme di assiomi U si deduce una contraddizione (cioé sia A che $\neg A$) allora da U si può dimostrare qualsiasi formula, cioé U perde di interesse. Un insieme di assiomi si dice *coerente* se da esso non si può dimostrare una contraddizione; il problema della coerenza di un insieme di assiomi è allora fondamentale per assicurarsi che tale insieme abbia un qualche interesse.

Esercizio 7. *Utilizzando le regole derivate nell'esercizio precedente dimostra:* $(A \to B) \to (A \to \neg B) \to \neg A \vdash A \to \neg\neg A$.

Soluzione.

$(A \to B) \to (A \to \neg B) \to \neg A, A \vdash A \to (\neg A \to A)$	A1
$(A \to B) \to (A \to \neg B) \to \neg A, A \vdash A$	ipotesi
$(A \to B) \to (A \to \neg B) \to \neg A, A \vdash \neg A \to A$	MP
$(A \to B) \to (A \to \neg B) \to \neg A, A \vdash (\neg A \to A) \to (\neg A \to \neg A) \to \neg\neg A$	istanza d'ipotesi
$(A \to B) \to (A \to \neg B) \to \neg A, A \vdash (\neg A \to \neg A) \to \neg\neg A$	MP
$(A \to B) \to (A \to \neg B) \to \neg A, A \vdash \neg A \to \neg A$	derivazione di $\vdash \neg A \to \neg A$
$(A \to B) \to (A \to \neg B) \to \neg A, A \vdash \neg\neg A$	MP
$(A \to B) \to (A \to \neg B) \to \neg A \vdash A \to \neg\neg A$	deduzione

Osserva come anche in questo caso la regola di deduzione semplifichi la dimostrazione. $\square$