UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "LA SAPIENZA"
CORSO DI STUDI IN INFORMATICA
ESERCITAZIONI AL CORSO DI LOGICA MATEMATICA

INSIEMI, RELAZIONI, FUNZIONI E ALGEBRE DI BOOLE

INSIEMI

Esercizio 1. *Sia A un insieme e $a \in A$. E' vero che $A \cup \{a\} = A$? E' vero che $A \cup \{\{a\}\} = A$?*

Soluzione. $A \cup \{a\} = A \neq A \cup \{\{a\}\}$ □

Esercizio 2. *Siano A, B, C tre insiemi di un insieme universo U; stabilire quali delle seguenti relazioni sono vere:*

(1) $A \subseteq C$ e $B \subset C$ implicano $A \cup B \subset C$
(2) $A \subseteq C$ e $A \subseteq B$ implicano $A \subset B \cap C$
(3) $A \subseteq B$ implica $U - A \subseteq U - B$
(4) $A \supset B$ e $C \cap A \neq \emptyset$ implicano $C \cap B = \emptyset$
(5) $A \supset B \cap C$ e $A \cap B = \emptyset$ implicano $B \cap C = \emptyset$
(6) $(A \cap B) - C = (A \cap C) - (B \cap C)$.

Soluzione.

(1) Falso, poni $A = C$
(2) Falso, poni $A = B = C$
(3) Falso, l'antecedente implica $U - b \subseteq U - A$
(4) Vero
(5) Vero, $(B \cap C) = (B \cap C) \cap B \subseteq A \cap B = \emptyset$
(6) Falso, considera $a \in A \cap B$, $a \notin C$.

□

RELAZIONI

Esercizio 3. *Dimostra che se $(A, \leq)$ e' un insieme parzialmente ordinato, allora anche $(A, \leq^{-1})$ lo e', dove $\leq^{-1}$ e' costituita da tutte le coppie di $\leq$ prese nell'ordine inverso.*

Soluzione. $\leq^{-1}$ e' ovviamente riflessiva (parliamo quindi di relazione di ordine *largo*).

Per la antisimmetria: se $a \leq^{-1} b$ e $b \leq^{-1} a$, allora per definizione $b \leq a$ e $a \leq b$, quindi per l'antisimmetria di $\leq$, ottengo $a = b$.

Per la transitivita': se $a \leq^{-1} b$ e $b \leq^{-1} c$ allora per definizione $b \leq a$ e $c \leq b$, quindi per la transitivita' di $\leq$, ottengo $c \leq a$, concludo $a \leq^{-1} c$ per definizione. □

Esercizio 4. *La relazione diagonale di un insieme A (aRa' sse $a = a'$) e' un ordine parziale su A?*

Soluzione. Si, e' riflessiva, antisimmetrica e (banalmente) transitiva. □

Esercizio 5. *Supponi R e' una relazione simmetrica e transitiva. Allora da xRy si ricava yRx, quindi xRx. Si puo' concludere che ogni relazione simmetrica e transitiva e' anche riflessiva?*

Date: 15 – 01 – 2007.

Soluzione. No, ad esempio considera la relazione vuota, che e' simmetrica e transitiva ma non riflessiva. $\square$

Esercizio 6. *Definiamo sull'insieme* $\mathbf{Z}$ *dei numeri interi relativi la relazione* $R(m, n)$ *sse* $mn > 0$. *E' una relazione di equivalenza?*

Soluzione. No, non e' riflessiva: non e' vero che $R(0, 0)$. $\square$

FUNZIONI

Esercizio 7. *Supponiamo* f *e* g *siano funzioni.*

(1) *Si dimostri che* $f \cap g$ *e' una funzione tale che* $Dom(f \cap g) \subseteq Dom(f) \cap Dom(g)$.
(2) *Si dimostri che* $f \cup g$ *e' una funzione sse* $f(x) = g(x)$ *per ogni* $x \in (Dom(f) \cap Dom(g))$.

Soluzione.

(1) Unicita': se $(x, y), (x, z) \in f \cap g)$ allora $(x, y), (x, z) \in f$, siccome f e' una funzione deduciamo che $y = z$. E' ovvio che $Dom(f \cap g) \subseteq Dom(f) \cap Dom(g)$.
(2) Supponi $f \cup g$ sia una funzione, se $x \in (Dom(f) \cap Dom(g))$ allora $(x, f(x), (x, g(x)) \in f \cup g$, quindi per unicita' $f(x) = g(x)$. Viceversa supponi che $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in (Dom(f) \cap Dom(g))$, se $(x, y), (x, z) \in f \cup g$, allora si danno tre casi:
   - $(x, y), (x, z) \in f$, quindi per unicita' su f, $y = z$;
   - $(x, y), (x, z) \in g$, quindi per unicita' su g, $y = z$;
   - $(x, y) \in f, (x, z) \in G$, allora siccome $y = f(x) = g(x) = z$ ottengo $y = z$.

$\square$

Esercizio 8. *Sia* A *un insieme di funzioni tale che, per ogni* $f, g \in A$, *vale che* $f \subseteq g$ *oppure* $g \subseteq f$. *Si dimostri che* $\bigcup A$ *e' una funzione di dominio* $\bigcup_{f \in A} Dom(f)$.

Soluzione. Unicita': sia $(x, y), (x, z) \in \bigcup A$, allora $\exists f, g \in A$, tali che $(x, y) \in f$ e $(x, z) \in g$. Per definizione di A, possiamo supporre $f \subseteq g$, quindi $(x, y), (x, z) \in g$, e per unicita' su g ottengo $y = z$.

Esistenza: sia $x \in \bigcup_{f \in A} Dom(f)$, allora $\exists f \in A$ e esiste y tale che $(x, y) \in f$, da cui ottengo $(x, y) \in \bigcup A$. $\square$

Esercizio 9. *Si dimostri per induzione che, per ogni numero naturale* n, *posti* A, B *sono due insiemi con* n *elementi, se* $f : A \to B$ *e' iniettiva allora e' anche suriettiva.*

Soluzione. Se $n = 0$, allora f e' la funzione vuota, che e' biiettiva. Suppongo l'asserto vero per n, lo dimostro per $n + 1$. Siano A, B due insiemi con $n + 1$ elementi, f una funzione iniettiva da A in B. Sia $a \in A$ e considera $f' = f - \{(a, f(a)\}$. Siccome f e' iniettiva non esiste $a' \in A - \{a\}$, tale che $f(a') = f(a)$, quindi possiamo affermare che f' e' una funzione iniettiva da $A - \{a\}$ in $B - \{f(a)\}$. Per ipotesi induttiva f' e' una suriezione, da cui deduciamo che f e' una suriezione da A verso B. $\square$

Esercizio 10. *Se* P *e' un enunciato, poniamo* $P = 0$ *se* P *e' falso,* $P = 1$ *se* P *e' vero.*

La funzione $f : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$ *definita da* $f(P) = 1 - P$ *interpreta la negazione. Infatti* $f(0) = 1$ *e* $f(1) = 0$.

Consideriamo ora le seguenti funzioni $f : \{0, 1\}^2 \to \{0, 1\}$:

(1) $f(P, P) = PQ$
(2) $f(P, Q) = P + Q - PQ$

Quali enunciati interpretano?

Viceversa definisci con $+, \cdot, -$ *la funzione che interpreta* $P \to Q$.

Se $f(P, Q) = 1$ *per ogni* $(P, Q) \in \{0, 1\}^2$ *a quale tipo di enunciato corrisponde* f?

Soluzione.

(1) $P \wedge Q$

(2) $P \vee Q$

$P \to Q$ e' interpretata da $1 - P + PQ$.

Se $f(P, Q) = 1$ per ogni valore di P e Q, allora f rappresenta una tautologia. □

ALGEBRE DI BOOLE

Esercizio 11. *Indico con F l'insieme delle formule proposizionali costruite a partire da un insieme infinito di variabili $V = \{p, q, \dots\}$ e dai connettivi $\vee, \wedge, \neg$. Indico con $\equiv$ la relazione di equivalenza logica tra formule e $F/\equiv$ l'insieme F quozientato da $\equiv$. Infine indico con $\Vdash$ la relazione di conseguenza logica. Dimostra che $(F/\equiv, \Vdash, \vee, \wedge)$ definisce un'algebra di Boole sopra $F/\equiv$. Qual e' il complemento di un elemento? Qual e' il massimo e il minimo?*

Soluzione. Iniziamo a dimostrare che $\Vdash$ e' un ordine (largo) parziale su $F/\equiv$. D'ora in poi utilizzero' le formule per indicare la loro classe di equivalenza secondo $\equiv$.

- $\Vdash$ e' riflessivo, perche' $A \Vdash A$
- $\Vdash$ e' antisimmetrico, perche' $A \Vdash B$ e $B \Vdash A$ implicano che $A \equiv B$ (e ricorda che noi lavoriamo su $F/\equiv$ quindi A, B indicano la stessa classe di equivalenza)
- $\Vdash$ e' transitivo, perche' $A \Vdash B$, $B \Vdash C$ implicano che $A \Vdash C$

Ora dobbiamo mostrare che $\vee$ e $\wedge$ definiscono risp. il sup e l'inf dell'ordine definito da $\Vdash$. Facciamolo solo per $\vee$: osservo che $A \Vdash A \vee B$ e pure che $B \Vdash A \vee B$, difatti ogni valutazione di verita' che rende vera A (o B) rende vera pure $A \vee B$. Quindi $A \vee B$ e' maggiorante sia di A che di B. Ora bisogna dimostrare che e' il minimo tra i maggioranti, ossia che: per ogni C tale che $A \Vdash C$ e $B \Vdash C$ ottengo $A \vee B \Vdash C$. Questo pure e' vero, infatti una valutazione di verita' che rende vero $A \vee B$ deve rendere vero A, oppure B. Nel primo (risp. secondo) caso ottengo che la valutazione rende vera C perche' $A \Vdash C$ (risp. $B \Vdash C$). Osserva che nell'argomentare che $\vee$ definisce un maggiorante abbiamo utilizzato uno schema simile alle regole di introduzione di $\vee$ in deduzione naturale, mentre per argomentare che tale maggiorante e' minimo tra i maggioranti abbiamo utilizzato uno schema simile alla regola di eliminazione di $\vee$ in deduzione naturale!

Dobbiamo ora dimostrare che il reticolo e' distributivo, ovvero che $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (e lo stesso scambiando $\vee$ con $\wedge$). Questo lo mostra facilmente con le tavole di verita'.

Ora dobbiamo definire il massimo, il minimo e il complemento. Il massimo e' dato dall'insieme 1 delle tautologie, infatti per ogni C, $C \Vdash 1$, mentre il minimo e' dato dall'insieme 0 delle contraddizioni, infatti $0 \Vdash C$ per ogni C. E' quindi immediato notare che data (una classe di equivalenza di) una formula A, il suo complemento e' (la classe di equivalenza di) $\neg A$: infatti $A \vee \neg A \equiv 1$ e $A \wedge \neg A \equiv 0$. □