UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "LA SAPIENZA"
CORSO DI STUDI IN INFORMATICA

ESERCITAZIONI AL CORSO DI LOGICA MATEMATICA

DEDUZIONE NATURALE

Esercizio 1. *Dimostra nel calcolo della deduzione naturale le seguenti formule:*

(1) $\neg\neg A \to A$
(2) $A \to \neg\neg A$
(3) $\neg(A \wedge B) \to A \to \neg B$
(4) $(A \to (B \to C)) \to ((A \wedge B) \to C)$

Soluzione.

(1) Dimostriamo $\neg\neg A \to A$:

$${\scriptstyle \to e}\,\dfrac{{\scriptstyle RAA}\,\dfrac{{\scriptstyle \neg e}\,\dfrac{[\neg\neg A] \qquad [\neg A]}{\bot}}{A}}{\neg\neg A \to A}$$

(2) Dimostriamo $A \to \neg\neg A$:

$${\scriptstyle \to e}\,\dfrac{{\scriptstyle \neg i}\,\dfrac{{\scriptstyle \neg e}\,\dfrac{[\neg A] \qquad [A]}{\bot}}{\neg\neg A}}{A \to \neg\neg A}$$

Osserva la differenza tra la dimostrazione di $\neg\neg A \to A$, in cui viene utilizzata la riduzione ad assurdo (RAA) e la dimostrazione di $A \to \neg\neg A$, in cui viene utilizzata la introduzione della negazione ($\neg i$). Le due dimostrazioni sono di natura profondamente differente: la prima è caratteristica della logica classica, la seconda è già dimostrabile nella logica intuizionista.

(3) Dimostriamo $\neg(A \wedge B) \to A \to \neg B$:

$${\scriptstyle \to i}\,\dfrac{{\scriptstyle \to i}\,\dfrac{{\scriptstyle \neg i}\,\dfrac{{\scriptstyle \neg e}\,\dfrac{{\scriptstyle \wedge e}\,\dfrac{[A] \qquad [B]}{A \wedge B} \qquad [\neg(A \wedge B)]}{\bot}}{\neg B}}{A \to \neg B}}{\neg(A \wedge B) \to A \to \neg B}$$

(4) Dimostriamo $(A \to (B \to C)) \to ((A \wedge B) \to C)$:

$${\scriptstyle \to i}\,\dfrac{{\scriptstyle \to i}\,\dfrac{{\scriptstyle \to e}\,\dfrac{{\scriptstyle \wedge e}\,\dfrac{[A \wedge B]}{B} \qquad {\scriptstyle \to e}\,\dfrac{{\scriptstyle \wedge e}\,\dfrac{[A \wedge B]}{A} \qquad [A \to (B \to C)]}{B \to C}}{C}}{(A \wedge B) \to C}}{(A \to (B \to C)) \to ((A \wedge B) \to C)}$$

Date: 21 – 12 – 2006.

$\square$

Esercizio 2. *Dimostra che ogni formula proposizionale se e' dimostrabile nel calcolo di Hilbert allora e' dimostrabile nel calcolo della deduzione naturale.*

Soluzione. Anzitutto dimostriamo i tre assiomi di Hilbert:

- dimostriamo il primo assioma:

$$
{\scriptstyle \to i}\;\dfrac{{\scriptstyle \to i}\;\dfrac{[A]}{B \to A}}{A \to (B \to A)}
$$

- dimostriamo il secondo assioma:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A] \qquad [A \to B]}{B} \qquad \dfrac{[A] \qquad [A \to (B \to C)]}{B \to C}}{C}}{A \to C}}{(A \to B) \to A \to C}}{(A \to (B \to C)) \to (A \to B) \to A \to C}
$$

- dimostriamo il terzo assioma (nota che qui è l'unico momento in cui si utilizza la regola reductio ad absurdum RAA):

$$
\dfrac{\dfrac{{\scriptstyle RAA}\;\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg B] \qquad [\neg B \to \neg A]}{\neg A} \qquad [A]}{\bot}}{B}}{A \to B}}{(\neg B \to \neg A) \to A \to B}
$$

Infine bisogna mostrare che l'unica regola di derivazione del calcolo di Hilbert (modus ponens) è valida nella deduzione naturale, ovvero che se ho una dimostrazione di A e una dimostrazione di $A \to B$ allora ho una dimostrazione di B. Questo segue immediatamente dalla regola di eliminazione dell'implicazione.

Abbiamo quindi dimostrato che tutte le formule che sono dimostrabili nel calcolo di Hilbert, sono pure dimostrabili nel calcolo della deduzione naturale. $\square$

Viceversa e' pure vero che una formula dimostrabile nella deduzione naturale e' pure dimostrabile nel calcolo di Hilbert, per dimostrarlo però occorre una maggiore attenzione, in particolare bisogna introdurre la costante $\bot$ e interpretare $\neg A$ come $A \to \bot$.

Esercizio 3. *Definisci $\wedge$ con i connettivi $\neg, \to$ e giustifica le regole di introduzione e eliminazione di $\wedge$ nella deduzione naturale utilizzando le sole regole che riguardano i connettivi $\to$ e $\neg$.*

Soluzione. Sappiamo che $A \wedge B$ e' equivalente a $\neg(A \to \neg B)$. Dobbiamo quindi dimostrare che $A, B \vdash \neg(A \to \neg B)$ (introduzione $\wedge$), $\neg(A \to \neg B) \vdash A$ e $\neg(A \to \neg B) \vdash B$ (eliminazione $\wedge$).

Iniziamo con l'introduzione di $\wedge$:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \qquad [A \to \neg B]}{\neg B} \qquad B}{\bot}}{\neg(A \to \neg B)}
$$

Occupiamoci ora della prima eliminazione:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A] \qquad [A]}{\bot}}{\neg B}}{A \to \neg B} \qquad \neg(A \to \neg B)}{\bot}}{A}$$

Infine la seconda eliminazione:

$$\dfrac{\dfrac{\neg(A \to \neg B) \qquad \dfrac{[\neg B]}{A \to \neg B}}{\bot}}{B}$$

□

Esercizio 4 (Difficile). *Dimostra nella deduzione naturale la legge di De Morgan della congiunzione:*

$$\neg(A \land B) \to (\neg A \lor \neg B)$$

e

$$(\neg A \lor \neg B) \to \neg(A \land B))$$

Soluzione. Osserva che la dimostrazione fatta a lezione era sbagliata perchè conteneva l'ipotesi libera $A \lor B$. Una dimostrazione esatta è la seguente, dove utilizzo gli indici $1, 2, 3, 4$ per indicare le regole dove vengono scaricate le ipotesi:

$$4\,\dfrac{RAA,3\,\dfrac{\dfrac{\dfrac{2\,\dfrac{\dfrac{\dfrac{1\,\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^2 \qquad [B]^1}{A \land B} \qquad [\neg(A \land B)]^4}{\bot}}{\neg B}}{\neg A \lor \neg B} \qquad [\neg(\neg A \lor \neg B)]^3}{\bot}}{\neg A}}{\neg A \lor \neg B} \qquad [\neg(\neg A \lor \neg B)]^3}{\bot}}{\neg A \lor \neg B}}{\neg(A \land B) \to (\neg A \lor \neg B)}$$

La formula $(\neg A \lor \neg B) \to \neg(A \land B))$ ha una dimostrazione invece molto più semplice (fatta a lezione):

$$4\,\dfrac{3\,\dfrac{[\neg A \lor \neg B]^4 \qquad 1\,\dfrac{\dfrac{[\neg A]^3 \qquad \dfrac{[A \land B]^1}{A}}{\bot}}{\neg(A \land B)} \qquad 2\,\dfrac{\dfrac{[\neg B]^3 \qquad \dfrac{[A \land B]^2}{B}}{\bot}}{\neg(A \land B)}}{\neg(A \land B)}}{(\neg A \lor \neg B) \to \neg(A \land B)}$$

Come per le formule del primo esercizio ($\neg\neg A \to A$ e $A \to \neg\neg A$) osserva che anche in questo caso le formule $\neg(A \land B) \to (\neg A \lor \neg B)$ e $(\neg A \lor \neg B) \to \neg(A \land B)$ hanno natura molto diversa, in particolare la prima utilizza la riduzione per assurdo (RAA) la seconda utilizza la regola di eliminazione della disgiunzione. $(\neg A \lor \neg B) \to \neg(A \land B)$ è dimostrabile nella logica intuizionista, $\neg(A \land B) \to (\neg A \lor \neg B)$ non lo è. □